محاضرات في الإحصاء (3)

د. فارة ابراهيم

جامعة غليزان.

السنة الثانية ع. اقتصادية

نظرية العينات

لتكن مجتمعا وشبه الحصائي n و لتكن المعاينة Ω تسحب من هذا المجتمع بالطريقة (عشوائيا) عينة ذات حجم n وسطها الحسابي $\overline{X}$. المتغير $\overline{X}$ تختلف من عينة إلى أخرى وقيم $\overline{X}$ تتحدد بالطريقة (لأن السحب عشوائي) وبالتالي فإن $\overline{X}$ هو متغير عشوائي. فالهدف من دراسة العينات هو إيجاد التوزيع الإحصائي للمتغير العشوائي $\overline{X}$ في العينات.

نوجد عدة طرق لسحب العينات من المجتمع وفي دراستنا سوف نعتمد على المعاينة العشوائية

مثال: ليكن المجتمع الإحصائي E حيث

$$E = \{2, 4, 8, 12, 18\}$$

نسحب منه عشوائيا (بسحب الإرجاع)

عدد الحالات الممكنة حيث k هو عدد عناصره

$$\Rightarrow n = A_n^k = A_5^2 = 5^2 \Rightarrow \boxed{n = 25}$$

عدد العينات الممكنة هو 25 عينة

د. غادة ابراهيم

الحاط = الممكن ل

(2, 2)	(2, 4)	(2, 8)	(2, 12)	(2, 18)
(4, 2)	(4, 4)	(4, 8)	(4, 12)	(4, 18)
(8, 2)	(8, 4)	(8, 8)	(8, 12)	(8, 18)
(12, 2)	(12, 4)	(12, 8)	(12, 12)	(12, 18)
(18, 2)	(18, 4)	(18, 8)	(18, 12)	(18, 18)

المتوسطات الحسابية $\bar{X}$ في العينات هي:

2	3	5	7	10
3	4	6	8	11
5	6	8	10	13
7	8	10	12	15
10	11	13	15	18

$\bar{X}$: هو ما يمكن سحبه عشوائي

المحاضرة (3)

1) توزيع العينة الوسط الحسابي للعينة

نعتبر مجتمعا حجمه كبير N ويدرس الصفة الكمية X والمراد منها دراسة تجانس هذه الصفة في المجتمع المدروس، نسحب منه عشوائيا وبالإرجاع عينة ذات حجم n ونحسب وسطها الحسابي $\bar{X}$. من نتائج نظرية النهاية المركزية أن X تخضع لتوزيع طبيعي إذا كان حجم العينة كبير، حسب التطبيقات إذا كان $n \geq 30$ فإن التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{X}$ طبيعي وإذا كان $n < 30$ نعرف أن التوزيع الاحتمالي للمجتمع طبيعي، أي أن $X \sim N(\mu, \sigma)$

* يمكن بالتالي تحديد التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{X}$ (توزيع المعاينة للوسط الحسابي) وفقا للجدول التالي:

	السحب بالإرجاع	السحب دون إرجاع
$N \to +\infty$ أو $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
$\frac{n}{N} > 0{,}05$	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$

* إذا كان $n < 30$ نعرف أن توزيع المجتمع طبيعي أي $X \sim N(\mu, \sigma)$

الإحصاء 3

تطبيق 1

مجوزنا 1000 مصباح كهربائي. متوسط مدة اشتغالها هو (800) ساعة بانحراف معياري $\sigma = 30$

1- أحسب احتمال أن تزيد مدة اشتغال المجموعة لعينة من (40) مصباح عن 850 ساعة (السحب تم بالإرجاع)

2- أحسب احتمال أن تقل مدة اشتغال المجموعة ذات حجم (80) مصباح (السحب بدون إرجاع) عن 780 ساعة وتزيد عن 860 ساعة.

حل التطبيق 1

$N = 1000 \quad \sigma = 30$

$\mu = 800$

$n = 40$ (السحب بالإرجاع)

① $P(\bar{X} \leq 850) = ?$

On sait que $\bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}})$

$\mu_{\bar{X}} = \mu \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$\Rightarrow \bar{X} \sim N(800, \frac{30}{\sqrt{40}}) \Rightarrow \bar{X} \sim N(800, 4,74)$

$\Rightarrow P(\bar{X} \leq 850) = ?$ On pose $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$ $Z \sim N(0,1)$

د. شارف ابراهيم

حساب (د):

$$P(\bar{X} \leq 850) = P\left(Z \leq \frac{850 - 800}{4,74}\right) = P(Z \leq 10,54)$$

$$\Rightarrow P(Z \leq 10,54) = 0,99$$

لي من الجدول العاكس لـ Z

$$\Rightarrow \boxed{P(\bar{X} \leq 850) = 0,99}$$

(e) حساب $P(780 \leq \bar{X} \leq 860)$

$$n = 80 \; ; \; \frac{n}{N} = \frac{80}{1000} = 0,08 > 0,05$$

(السحب دون ارجاع)

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N(800 ; 3,43)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow P(780 \leq \bar{X} \leq 860) = P\left(\frac{780 - 800}{3,43} \leq Z \leq \frac{860 - 800}{3,43}\right)$$

$$= P(-5,83 \leq Z \leq 17,49)$$

$$= P(Z \leq 17,49) - P(Z \leq -5,83)$$

$$= P(Z \leq 17,49) - [1 - P(Z \leq 5,83)]$$

$$= 0,9999 - [1 - 0,99] = \boxed{0,98999}$$

د. فارة ابراهيم

إحصاء (03)

2- توزيع المعاينة للفروق بين وسطين حسابيين

نعتبر مجتمعين. الأول حجمه N_1 وسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1، أما الثاني فحجمه N_2 وسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2، نسحب من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها n_1 وسطها الحسابي $\bar{X}_1$. ونسحب من الثاني عينة عشوائية حجم عناصرها n_2 ووسطها الحسابي $\bar{X}_2$. في كل حالة نحسب الفرق d_i حيث $d_i(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$، نلاحظ أن الفرق $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يعتبر متغير الحسبي وبما أن السحب تم عشوائيا فإن الفرق $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي يكون على النحو التالي:

$$\bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_{\bar{X}_1}\right) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\bar{X}_1} \begin{cases} \rightarrow \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} \\ \rightarrow \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\sqrt{\dfrac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}} \end{cases}$$

$$\bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_{\bar{X}_2}\right) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\bar{X}_2} \begin{cases} \rightarrow \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} \\ \rightarrow \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\sqrt{\dfrac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}} \end{cases}$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 ; \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2}\right)$$