د. قارة ابراهيم

إحصاء (03)

تمرين 01 متوسط أجور عمال مؤسسة A هو 14000 دج بانحراف معياري قدره 800 دج ومتوسط أجور عمال مؤسسة B هو 12500 دج بانحراف معياري 700 دج

1) أحسب احتمال أن الفرق بين متوسط أجور عينة من (50) عامل يعملون في المؤسسة A ومتوسط أجور عينة من (60) عامل يعملون في المؤسسة B تقل عن 1600 دج.

$\mu_1 = 14000$
$\mu_2 = 12500$
$\sigma_1 = 800$
$\sigma_2 = 700$
$n_1 = 50$
$n_2 = 60$
$n_1 \geq 30$; $n_2 \geq 30$

$\Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightsquigarrow N(\mu_1 - \mu_2 ; \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2})$

$P(\bar{X}_1 \leq \bar{X}_2 + 1600) = ?$

$\Rightarrow P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 1600) = ?$

لدينا التوزيع المعاينة

$\bar{X}_1 \rightsquigarrow N(\mu_1 ; \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}})$

$\bar{X}_2 \rightsquigarrow N(\mu_2 ; \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}})$

$\Rightarrow \bar{X}_1 \rightsquigarrow N(14000 ; \frac{800}{\sqrt{50}})$

$\bar{X}_2 \rightsquigarrow N(12500 ; \frac{700}{\sqrt{60}})$

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \rightsquigarrow N(1500 ; \sqrt{\frac{(800)^2}{50} + \frac{(700)^2}{60}})$

نضع

$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$

مع $Z \rightsquigarrow N(0;1)$

$\Rightarrow P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 1600)$

$= P(Z \leq \frac{1600 - 1500}{144,79})$

$= P(Z \leq 0,69) \approx$

3) توزيع المعاينة للنسب: نعتبر مجتمعا حجمه عناصره N ونسبة عناصره التي تميز خاصية معينة هي P (نسبة العناصر التي لا تميز هذه الخاصية هي $q=1-P$)، نسحب من هذا المجتمع عينة ذات حجم n (سحب عشوائي) ونعتبر $\bar{P}$ نسبة العناصر التي تميز بدورها الخاصية في العينة المسحوبة، نلاحظ أن النسبة P تعبر بتغير العينة المسحوبة وبما أن السحب تم بالصدفة (سحب عشوائي) فإن النسبة $\bar{P}$ عبارة عن متغير عشوائي.

مثال: لتكن لدينا المجتمع الإحصائي E حيث

$E=\{6;3;4;5\}$

نعتبر P نسبة الأرقام الزوجية، $P=\frac{2}{4}=0,5$ $q=1-0,5 \Rightarrow q=0,5$

نسحب منه عشوائيا بسحب بالإرجاع ($n=2$)

عدد الحالات الممكنة هو N^2 $4=4^2=16$ حالة

$\Rightarrow K=16$

الحالات الممكنة هي

$$\begin{pmatrix} (6,6) & (6,3) & (6,4) & (6,5) \\ (3,6) & (3,3) & (3,4) & (3,5) \\ (4,6) & (4,3) & (4,4) & (4,5) \\ (5,6) & (5,3) & (5,4) & (5,5) \end{pmatrix}$$

$\bar{P}$ كما يلي

1	0,5	1	0,5
0,5	00	0,5	00
1	0,5	1	0,5
0,5	00	0,5	00

النسبة $\bar{P}$ متغير عشوائي

يمكن حساب متوسط (توقع) المتغير العشوائي $\bar{P}$ عند الخواتان

$$E(\bar{P}) = \mu_{\bar{P}} = \frac{\sum \bar{P}_i}{n} = \frac{1+0,5+1+\dots+00}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum \bar{P}_i}{n} = \mu_{\bar{P}} = \frac{8}{16} = 0,5$$

وبالتالي يمكن استنتاج أن

$$\boxed{E(\bar{P}) = \mu_{\bar{P}} = P}$$

قاعدة ثابتة.

البرهان Preuve

ليكن X متغير عشوائي يخضع لتوزيع برنولي حيث

$$X \hookrightarrow B(p) \quad E(X) = p$$

$$\bar{P} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow E(\bar{P}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)$$

$$\Rightarrow E(\bar{P}) = \frac{1}{n} E(\sum x_i)$$

$$\Rightarrow E(\bar{P}) = \frac{1}{n} E(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\Rightarrow E(\bar{P}) = \frac{1}{n}(p+p+\dots+p) = \frac{np}{n} = p$$

حساب $\sigma_{\bar{P}}$

(البرهان Preuve)

لدينا X متغير عشوائي يخضع لتوزيع برنولي حيث

$X \hookrightarrow B(p)$ avec $E(X)=p$; $V(X)=pq$

soit $\bar{P}=\frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow V(\bar{P})=V\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)$

$\Rightarrow V(\bar{P})=\frac{1}{n^2}V(\sum x_i)$

$\Rightarrow V(\bar{P})=\frac{1}{n^2}V(x_1+x_2+\dots+x_n)$

$\Rightarrow V(\bar{P})=\frac{1}{n^2}(pq+pq+pq+\dots+n)$

$\Rightarrow V(\bar{P})=\frac{1}{n^2}(pqn)=\frac{pqn}{n^2}=\frac{pq}{n}$

$\Rightarrow V(\bar{P})=\frac{pq}{n}$

d'où $\boxed{\sigma_{\bar{P}}=\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ النتيجة مبرهنة.

* من نتائج نظرية النهاية المركزية أن النسبة $\bar{P}$ تخضع لتوزيع طبيعي إذا كان حجم العينة $n \geq 30$

أي أن $\bar{P} \rightsquigarrow N\left(\mu_{\bar{P}}; \sigma_{\bar{P}}\right)$

- الجدول التالي يلخص التوزيع الاحتمالي للنسبة $\bar{P}$

	السحب بإرجاع	السحب بدون إرجاع
$N \to +\infty$ $\frac{n}{N} \leq 0,05$	$\bar{P} \hookrightarrow N\left(P ; \sqrt{\frac{PQ}{n}}\right)$	$\bar{P} \hookrightarrow N\left(P ; \sqrt{\frac{PQ}{n}}\right)$
$\frac{n}{N} > 0,05$	$\bar{P} \hookrightarrow N\left(P ; \sqrt{\frac{PQ}{n}}\right)$	$\bar{P} \hookrightarrow N\left(P ; \sqrt{\frac{PQ}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$

مثال: نسبة الدخين في مدينة ما هي 40%
أحسب احتمال أن تزيد نسبة الدخين في عينة من (40) شخص من سكان هذه المدينة عن 45%

الحل

$P = 0,4 \quad Q = 0,6 \quad N \to +\infty$

$P(\bar{P} \leq 0,45) = ?$

$n \geq 30 \Rightarrow \bar{P} \hookrightarrow N\left(P ; \sqrt{\frac{PQ}{n}}\right)$

$\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{PQ}{n}} \Rightarrow \sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{(0,4)(0,6)}{40}} \Rightarrow \sigma_{\bar{P}} = 0,077$

$\Rightarrow \bar{P} \hookrightarrow N(0,4 ; 0,77)$

د. قارة إبراهيم

on pose $Z = \frac{\overline{P} - P}{\sigma_{\overline{P}}}$ $Z \hookrightarrow N(0;1)$

$$\Rightarrow P\left(\overline{P} \leq 0{,}45\right) = P\left(Z \leq \frac{0{,}45 - 0{,}4}{0{,}077}\right)$$

$$= P(Z \leq 0{,}64) = \text{من الجدول}$$

Z المقابل

4- توزيع العينة للفروق بين النسب

$$\overline{P}_1 \hookrightarrow N\left(P_1; \sigma_{\overline{P}_1}\right) \quad \overline{P}_2 \hookrightarrow N\left(P_2; \sigma_{\overline{P}_2}\right)$$

avec $\sigma_{\overline{P}_1}$:

$$\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1}}$$

أو

$$\sqrt{\frac{P_1 q_1}{n_1}} \sqrt{\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}}$$

$$\sigma_{\overline{P}_2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{P_2 q_2}{n_2}} \\ \sqrt{\frac{P_2 q_2}{n_2}} \sqrt{\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{P}_1 - \overline{P}_2 \hookrightarrow N\left(P_1 - P_2; \sqrt{\sigma_{\overline{P}_1}^2 + \sigma_{\overline{P}_2}^2}\right)$$

si $n_1, n_2 \geq 30$