1 – بعض المفاهيم الأساسية الخاصة بالنماذج الإنحدارية : تحليل الانحدار من أكثر الأدوات المستعملة في التحليل القياسي فهو يهتم بوصف وتقييم العلاقة بين متغير (عادة يسمى المتغير التابع) و واحد أو أكثر لمتغيرات أخرى (تسمى عادة المتغيرات المفسرة أو المتغيرات المستقلة) ويرمز للمتغير المفسر بـ y والمتغيرات المفسرة بـ $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n$.

وكلمة انحدار استخدمت من قبل Sir Francis Galton من إنجلترا و الذي كان يدرس العلاقة بين طول الأبناء وطول الآباء والذي لاحظ أن الطول يميل إلى المعدل، مع أن الآباء الطوال يكون أبنائهم طوال والآباء القصار يميل أبنائهم لأن يكونوا قصارا، أي أن هناك ميل عند الأبناء للمعدل (انحدار نحو المعدل).

بالعودة إلى الرموز التي استخدمناها حيث رمزنا للمتغير المفسَر بـ Y والمتغيرات المفسرة بـ $X_1\ X_2\ X_3 \ldots X_n$ ، إذا كانت $k=1$ ، أي إن هناك متغير مستقل واحد فقط من المتغيرات المفسرة(x واحدة فقط) يعرف هذا بالانحدار البسيط (مثال : Y = المبيعات ، X = نفقات الإشهار)، وإذا كانت $k \geq 2$ آي أن هناك اكثر من x واحد و متغير مستقل، نحصل على ما يعرف بالانحدار المتعدد (مثال : Y = استهلاك الأسرة، X_1 = دخل الأسرة، X_2= الأصول المالية للأسرة، X_3 = حجم الأسرة.)

و إذا افترضنا أن المتغيرات X هي المتغيرات التي تؤثر على المتغير Y، فهناك العديد من المصطلحات التي يمكن أن نطلقها على X , Y ، فنجد :

– المتغيرات X يطلق عليها اسم : مُتنبأ، مفسر، مستقل، مسبب، خارجي، المتغير المتحكم.

– المتغيرات Y نجد (التسميات مقابلة مباشرة للأسماء الخاصة بالمتغير X): متَنبأ به ، مفَسر ، تابع ، متأثر ، داخلي ، المتغير الهدف.

كل من هذه المصطلحات يستخدم حسب الغرض من تحليل الانحدار فالمصطلح الأول يستخدم في عملية التنبؤ بينما المصطلحات الأخرى تستخدم في مناقشة الانحدار، أما المصطلح خارجي وداخلي تستخدم فقط من قبل القياسيين، بينما المصطلح الأخير يستخدم في التجارب الخاصة بدراسة تأثير مسببات معينة على متغير مستهدف.

و تنقسم النماذج الانحدارية إلى عدة أنواع فنجد الانحدار الخطي و الانحدار غير الخطي، و الانحدار البسيط و الانحدار المتعدد، وتحدد درجة الخطية على أساس درجة العلاقة المرد قياسها، ففي حالة الانحدار الخطي تكون المعادلة الممثلة للعلاقة من الدرجة الأولى، وفي حالة غير الخطي تكون المعادلة من الدرجة غير الأولى (معادلة لوغارتمية أو أسية ....إلخ) ، وقبل تقدير العلاقة بين المتغير التابع و المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) يجب أولا البحث عن أنسب الصيغ الرياضية التي تعبر عن هذه العلاقة و ذلك بالتعرف على الشكل البياني لها، فإذا كانت الصيغة المختارة غير خطية نقوم بتحويلها إلى صيغة خطية لإجراء عملية التقدير و ذلك باستخدام وحدات اللوغاريتم الطبيعي.

ويمكن ملاحظة مختلف الصيغ الرياضية في الجدول التالي و ذلك باستخدام معادلة ذات متغير مستقل واحد

الجدول رقم 01 : مقارنة بين الصيغ الرياضية لمختلف النماذج الانحدارية

نوع الصيغة	الصيغة غير الخطية	الصيغة الخطية
الصيغة الخطية	/	$Y = ß_0 + ß_1 X$
الصيغة العكسية	/	$Y = ß_0 + ß_1 (1/X)$
الصيغة التربيعية	/	$Y = ß_0 + ß_1 X + ß_2 X^2$
الصيغة اللوغارتمية المزدوجة	$Y = ß_0 + X^{ß1}$	$Ln Y = Ln ß_0 + ß_1 Ln X$
الصيغة نصف اللوغارتمية	$e^Y = e^{ß0} X^{ß1}$	$Y = ß_0 + ß_1 Ln X$
الصيغة الأسية	$Y = e^{ß0+ß1X}$	$Ln Y = ß_0 + ß_1 X$

المصدر : أموري هادي كاظم الحسناوي ، طرق القياس الاقتصادي ، عمان، دار وائل للنشر 2002، ص 60.

2– تقديم وصياغة وتقدير النموذج الخطي البسيط: في هذه المرحلة سنتطرق الى أهم العناصر الأساسية التي من أجلها يتم بناء وصياغة نموذج خطي بسيط :

2–1– تعريف النموذج الخطي البسيط : هو عبارة عن علاقة دالية من الدرجة الأولى تربط متغيرين مأخوذين من واقع اقتصادي أو اجتماعي معين خلال فترة محددة، احدهما تابع نرمز له بـ Y و الثاني مستقل نرمز له بـ X بحيث يتم إيجاد معالم الدالة الخطية (ثوابتها) بعدة طرق أهمها طريقة المربعات الصغرى العادية.

و العلاقة الموجودة بين المتغيرين Y و X يمكن كتابتها من الشكل : [1]

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

حيث تمثل: β ; α معاملات الانحدار، u : الخطأ العشوائي

2–2– تقدير معالم النموذج الخطي البسيط : هناك عدة طرق لتقدير معاملات معادلة الانحدار أهمها طريقة المربعات الصغرى العادية (MCO) ، حيث تعتمد هذه الطريقة في الحصول على مقدرات الانحدار α،β بحيث يتم تصغير مجموع مربعات البواقي إلى أدنى قيمه لها وبعد ذلك يشرع في الحصول على المعاملات المقدرة حيث نرمز لـ (a) بالمعلمة المقدرة لـ α، و (b) بالمعلمة المقدرة لـ β .

وللقيام بعملية التقدير بطريقة المربعات الصغرى العادية يجب الارتكاز على بعض الفرضيات الأساسية منها :[2]

1 – أن تكون العلاقة خطية بين المتغير التابع والمتغير المستقل

1 - Rachid BENDIB, Econométrie, Théorie et applications (Alger OPU 2001) P 32

2- John Johnston, Econometric methods, International student editions, 2 illustrée, McGraw-Hill, 1971

2 – $E(u)=0$: وسـط التوزيع الاحتمالي الخاص بالمتغير العشوائي تساوي الصفر أي أن قيم u تتمركز حول الصفر.

3– $V(u)=\sigma^2$: تباين التوزيع الاحتمالي الخاص بالعناصر العشوائية u يساوي قيمه ثابتة وموجبة.

4– استقلالية الخطأ العشوائي: أي أنها مستقله عن بعضها $COV(u_i, u_j)=0$

5– عدم وجود ارتباط بين المتغير المستقل والمتغير العشوائي $COV(X_i, u_j)=0$

6– التوزيع الطبيعي للخطأ العشوائي $u_i \sim N(0,\sigma^2)$

وتعتبر طريقة المربعات الصغرى العادية من أهم طرق التقدير حيث تهدف الى تصغير مربعات الفروق بين القيم الحقيقية والقيم المقدرة للمتغير التابع.

و انطلاقا من النموذج الخطي البسيط : $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$

لدينا النموذج المقدر يكتب من الشكل : $\hat{Y}_i = a + bX_i$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة الخاصة بالبواقي من الشكل التالي : $e_i = (Y_i - \hat{Y}_i)$

$$e_i = Y_i - (a + bX_i)$$

ومن أجل أن تكون مجموع مربعات البواقي أصغر ما يمكن، يجب أن تكون المشتقات الجزئية على النحو التالي :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

- **تقدير المعلمة (a)** : لتقدير المعلمة (a) نرتكز على المشتقات الجزئية $\dfrac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial a} = 0$ حيث :

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial a} = \frac{\partial(\sum(Y_i - a - bX_i)^2}{\partial a} = 0$$
$$\Rightarrow -2\sum(Y_i - a - bX_i) = 0$$
$$\Rightarrow -2\sum e_i = 0$$
$$\Rightarrow \sum e_i = 0$$
$$\Rightarrow \sum(Y_i - a - bX_i) = 0$$
$$\Rightarrow \sum Y_i - \sum a - b\sum X_i = 0$$
$$\Rightarrow \sum Y_i - na - b\sum X_i = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\sum Y_i}{n} - \frac{na}{n} - b\frac{\sum X_i}{n} = 0$$
$$\Rightarrow \bar{Y} - a - b\bar{X} = 0$$
$$\boxed{\Rightarrow a = \overline{Y} - b\,\overline{X}}$$

- **تقدير المعلمة (b)** : لتقدير المعلمة (b) نرتكز على المشتقات الجزئية $\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial b} = 0$ حيث :

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial b} = \frac{\partial(\sum(Y_i - a - bX_i)^2}{\partial b} = 0$$
$$\Rightarrow -2X_i\sum(Y_i - a - bX_i) = 0$$

نقوم بقسمة الطرفين على (2-) :

$$\Rightarrow X_i\sum(Y_i - a - bX_i) = 0$$
$$\Rightarrow \sum(X_iY_i) - a\sum X_i - b\sum X_i^2 = 0$$

نقوم بتعويض قيمة (a) في المعادلة حيث : $a = \bar{Y} - b\bar{X}$

$$\Rightarrow \sum(X_iY_i) - \bar{Y}\sum X_i + b\bar{X}\sum X_i - b\sum X_i^2 = 0$$

نقوم بقسمة الطرفين على (n) :

$$\Rightarrow \frac{\sum(X_iY_i)}{n} - \frac{\bar{Y}\sum X_i + b\bar{X}\sum X_i}{n} - b\frac{\sum X_i^2}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum(X_iY_i)}{n} - \frac{\sum X_i}{n}(\bar{Y} - b\bar{X}) = b\frac{\sum X_i^2}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum(X_iY_i)}{n} - \bar{X}\bar{Y} + b\bar{X}^2 = b\frac{\sum X_i^2}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum(X_iY_i)}{n} - \bar{X}\bar{Y} = b(\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2)$$

$$\Rightarrow b = \frac{\frac{\sum(X_iY_i)}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{(\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2)}$$

نقوم بضرب الطرفين في (n) لنتحصل على قيمة المعلمة المقدرة (b) :

$$\Rightarrow b = \frac{\sum X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

وبالتالي يمكن كتابة النموذج الخطي البسيط المقدر من الشكل التالي :

$$\hat{Y}_i = a + bX_i$$

- **التقدير حول نقطة المتوسط** : تعتمد هذه الطريقة في تقدير معلمات النموذج بالإعتماد على انحرافات قيم المتغير المستقل والتابع عن وسطيهما الحسابي، ويمكن كتابة قيمة المعلمة المقدرة (b) على النحو التالي : [1]

$$b = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

1 - جلاطو جيلالي، الاحصاء التطبيقي مع تمارين ومسائل محلولة، دار الخلدونية للنشر والتوزيع – الجزائر – 2009، ص 16.

ويمكن البرهان على هذه المساواة على النحو التالي :

$$b = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum(X_i Y_i - X_i \bar{Y} - \bar{X} Y_i + \bar{X} \bar{Y})}{\sum(X_i^2 - 2X_i \bar{X} + \bar{X}^2)}$$

$$= \frac{\sum X_i Y_i - \sum X_i \bar{Y} - \bar{X} \sum Y_i + \sum \bar{X} \bar{Y}}{\sum X_i^2 - 2\sum X_i \bar{X} + \sum \bar{X}^2}$$

$$= \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y} - \bar{X} n\bar{Y}_i + n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2}$$

$$b = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

اذا افترضنا أن :

$$x_i = (X_i - \bar{X})$$
$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

فيمكن كتابة قيمة المعلمة المقدرة (b) على النحو التالي :

$$b = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

كما يمكن كتابة قيمة المعلمة المقدرة (b) بدلالة التباين المشترك $COV(X,Y)$ والتباين $V(X)$ على النحو التالي :

$$b = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}$$

3- المميزات العددية والخصائص الإحصائية للمعلمات المقدرة :

3-1- المميزات العددية للمعلمات المقدرة : في هذه الحالة نقتصر على التوقع الرياضي والتباين للمعلمات المقدرة أي : $E(a)$، $E(b)$، $V(a)$ ، $V(b)K$ ، مع العلم أن كل من (a) و (b) هي مقدرات (α) و (β).

ودون التطرق الى البراهين الرياضية الخاصة بكل من خطوات الوصول الى نتائج التوقع الرياضي والتباين لكل من المعلمات المقدرة، وفي هذه الحالة نجد المميزات العددية للمعلمات المقدرة على النحو التالي : [1]

- $E(b) = \beta$ ✓
- $V(b) = \frac{\delta^2}{\sum x_i^2}$ ✓
- $E(a) = \alpha$ ✓
- $V(a) = \delta^2(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2})$ ✓
- $COV(a,b) = -\frac{\delta^2 \bar{X}}{\sum x_i^2}$ ✓

[1] - John Johnston, Econometric methods , Op cit, P 30

كما نستطيع القول أن من بين المميزات العددية للمعلمات المقدرة a و b نجد أنها تتبع التوزيع الطبيعي :

$$a \longrightarrow N\left(E(a), V(a)\right)$$

$$b \longrightarrow N\left(E(b), V(b)\right)$$

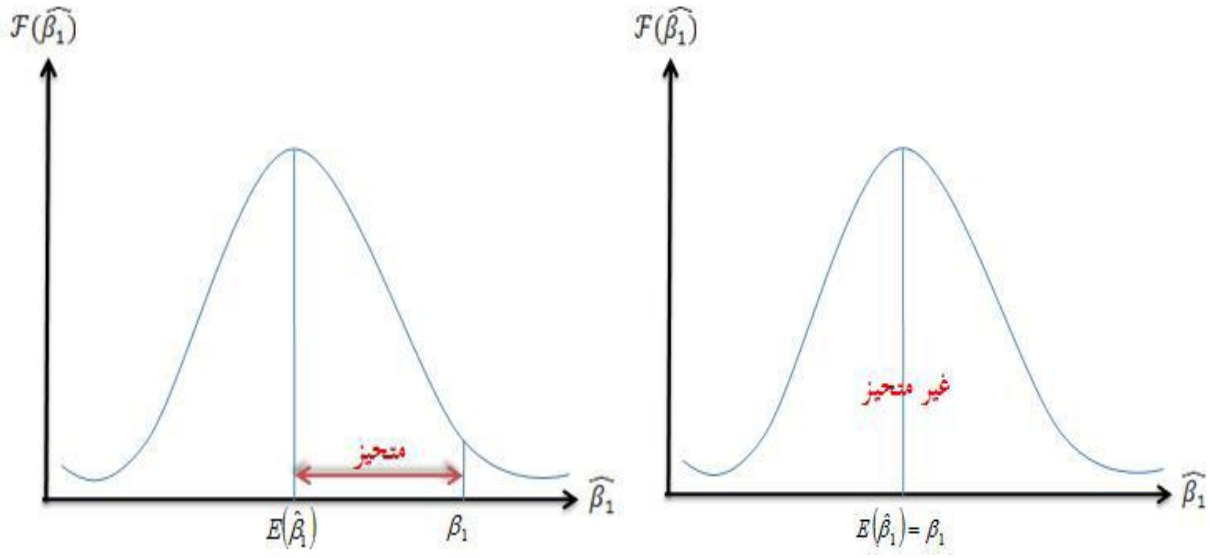
3-2- الخصائص الإحصائية للمعلمات المقدرة : من بين أهم الخصائص الإحصائية التي تتميز بها مقدرات المربعات الصغرى العادية نجد:

أ) **عدم التحيز**: نقول أن مقدرات (م ص ع) هي مقدرات لديها خاصية عدم التحيز إذا كانت على النحو التالي:

- ✓ a مقدرة غير متحيزة للمعلمة α أي أن : $E(a) = \alpha$ أو بمعنى آخر متوسط a= α ، إذا جمعت عينات كثيرة وفي كل عينه نحسب a يتم أخذ المتوسط، ذلك المتوسط نظريا يجب أن يتساوى مع المعلمة الحقيقية.
- ✓ و نفس الشيء بالنسبة لـ b مقدرة غير متحيزة للمعلمة β إذا كان $E(b) = \beta$ ، أي أن توقع b يجب أن يساوي المعلمة الحقيقية بمعنى آخر متوسط قيم b تساوي القيمة الحقيقية للمعلمة β.

ويوضح الشكل التالي حالة المقدار غير المتحيز والمقدار المتحيز :

الشكل رقم (02) : المقدار المتحيز والمقدار غير المتحيز



المصدر : عبد القادر محمد عبد القادر عطية، مرجع سبق ذكره، ص179 .

ب) الكفاءة (أدنى تباين): هذه الخاصية لها أهمية بالغة في الاقتصاد القياسي لأن أدنى تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، حيث هناك علاقة عكسية بين التباين ودقة القياسات كلما زاد التباين كلما انخفضت دقة القياسات وكلما قل ارتفعت دقة القياسات، و بالتالي فان مقدرات (م ص ع) a و b هي مقدرات تمتلك أدنى تباين مقارنة بمقدرات أخرى تقاس بطريقه مختلفة عن (م ص ع)، وبالتالي نستطيع القول أن المقدار الكفؤ هو ذو أصغر تباين

أي: $V(a) \longrightarrow Min$

$V(b) \longrightarrow Min$

ج) الإتساق : نقول أن المعلمات المقدرة هي معلمات متسقة إذا تحققت مايلي :

$Lim\ E(a)= \alpha$ ، $Lim\ E(b)= \beta$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

وتباين المعلمة المقدرة يقترب الى الصفر أي :

$Lim\ V(a)= 0$ ، $Lim\ V(b)= 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$.

وبالتالي نستطيع القول أن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (M.C.O) في التقدير راجع الى أن مقدرها هو أفضل مقدر خطي غير متحيز ومبررات استخدامها راجع الى الخصائص المذكورة سابقا والمتمثلة في عدم التحيز والكفاءة والاتساق.

4- دراسة صلاحية النموذج : لدراسة صلاحية النموذج نرتكز على الأدوات الاحصائية التالية :

- معامل الإرتباط (R)
- معامل التحديد (R^2)
- إختبار معنوية المعلمات المقدرة (إختبار ستيودنت (Test de Student)

4-1- معامل الإرتباط (r) : قبل التطرق الى معامل الارتباط سنقوم بتعريف الارتباط بصفة عامة والذي هو عبارة عن تعيين طبيعة وقوة العلاقة بين متغيرين أو عدمها، أما معامل الارتباط فهو المؤشر الذي يتم من خلاله تعيين طبيعة وقوة هذه العلاقة بين المتغيرين.

ويمكن أن نجد نوعين من الإرتباط بين المتغيرين :

أ) **الإرتباط الموجب (الطردي)** : وهو عبارة عن علاقة بين متغيرين (x,y) بحيث إذا تغير أحد المتغيرين فإن الآخر يتبعه في نفس الإتجاه .

ب) الإرتباط السالب (العكسي) : وهو عبارة عن علاقة بين متغيرين (x,y) بحيث إذا تغير أحد المتغيرين فإن الآخر يتبعه في الاتجاه المعاكس .

4-1-1- قياس الإرتباط : لقياس الارتباط نستخدم معامل الارتباط والذي يرمز له بالرمز (r) والذي هو عبارة عن مقياس رقمي يقيس قوة الارتباط بين متغيرين حيث تتراوح قيمته ما بين : (+1) و (-1)، وتدل إشارة المعامل الموجبة على العلاقة الطردية أما الاشارة السالبة فتدل على العلاقة العكسية.

والجدول التالي يوضح أنواع الارتباط واتجاه العلاقة لكل نوع :

الجدول رقم (02) : قياس الارتباط

قيمة معامل الارتباط	التفسير
+1	إرتباط طردي تام
من 0.70 الى غاية 0.99	إرتباط طردي قوي
من 0.50 الى غاية 0.69	إرتباط طردي متوسط
من 0.01 الى غاية 0.49	إرتباط طردي ضعيف
0	لا يوجد ارتباط

المصدر : من إعداد الباحث وبالارتكاز على المعلومات المستخرجة من المرجع الخاص ب : عايد كريم عبدعون الكناني، مقدمة في الإحصاء، ktab INC. 2014 ، ص 17

ملاحظة : وما قيل عن الارتباط الطردي ينطبق على الارتباط العكسي (مع وضع اشارة سالبة).

ولتحديد أسلوب القياس نجد أيضا أه هناك علاقة بين نوع المعطيات ومعامل الإرتباط المستخدم حسب الجدول التالي:

الجدول رقم (03) : قياس الارتباط من خلال نوع البيانات

نوع المتغير الأول	نوع المتغير الثاني	معامل الإرتباط الأنسب
كمي	كمي	بيرسون (Pearson)
رتبي (الزمن)	كمي	سبيرمان (Spearman)
كيفي	كيفي	سبيرمان (Spearman)

المصدر : من إعداد الباحث وبالارتكاز على المعلومات المستخرجة من المرجع الخاص ب : عايد كريم عبدعون الكناني، مرجع سبق ذكره ص 25

4-1-2- معامل الإرتباط (r) لبيرسون (Pearson) : هو من أكثر معاملات الارتباط استخداما وخاصة في القياس الكمي، ومستوى القياس المطلوب عند تطبيق معامل بيرسون (Pearson) للإرتباط أن تكون بيانات كلا المتغيرين (الظاهرتين المدروستين) بيانات كمية.

ويمكن حساب معامل بيرسون (Pearson) بدلالة بيانات المتغيرين (x,y) وباستخدام الصيغة التالية :

$$r(x,y) = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}\sqrt{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

$$r(x,y) = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x^2{}_i}\sqrt{\sum y^2{}_i}}$$

حيث :

$$x_i = (X_i - \bar{X})$$
$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

كما يمكن كتابة معامل الرتباط (r) بدلالة معامل التقدير (b) على النحو التالي :

لدينا :

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x^2{}_i}$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{b\frac{\sum x_i y_i}{\sum y^2{}_i}}$$

4-2- معامل التحديد (R^2) : وهو عبارة عن معامل يقيس القدرة التفسيرية للنموذج أو بعبارة أخرى هو عبارة عن نسبة تفسيرية تبين مدى تفسير المتغير المستقل للمتغير التابع، ويعتبر هذا المعامل جد مهم في دراسة صلاحية النموذج المقدر، ومراحل حسابه ترتكز على تحديد مجموع المربعات : [1]

1 - جلاطو جيلالي، مرجع سبق ذكره، ص 31.

- مجموع المربعات الكلية (SCT).
- مجموع المربعات التفسيرية (SCE).
- مجموع مربعات البواقي (SCR).

ولتحديد مجموع المربعات لدينا : $e_i = y_i - bx_i$

$$x_i = (X_i - \bar{X})$$

حيث :

$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

$$(e_i)^2 = (y_i - bx_i)^2$$

$$e_i^{\,2} = y_i^{\,2} - 2bx_i y_i + b^2 x_i^{\,2}$$

$$\sum e_i^{\,2} = \sum y_i^{\,2} - 2b\sum x_i y_i + b^2 \sum x_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \sum y_i^{\,2} = 2b\sum x_i y_i - b^2 \sum x_i^{\,2} + \sum e_i^{\,2}$$

ولدينا : $b = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x^2{}_i}$

وبالتالي يصبح لدينا :

$$\sum y_i^{\,2} = 2\frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^{\,2}} - \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^{\,4}} . \sum x_i^{\,2} + \sum e_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \sum y_i^{\,2} = 2\frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^{\,2}} - \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^{\,2}} + \sum e_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \sum y_i^{\,2} = \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^{\,2}} + \sum e_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \sum y_i^{\,2} = b\sum x_i y_i + \sum e_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow SCT = SCE + SCR$$

ولدينا معامل الإرتباط يكتب من الشكل التالي : $r(x,y) = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x^2{}_i}\sqrt{\sum y^2{}_i}}$

وبالتالي :

$$r^2(x,y)=\frac{(\sum x_i y_i)(\sum x_i y_i)}{\sum x^2{}_i \sum y^2{}_i}$$

$$\Rightarrow r^2 = b\frac{(\sum x_i y_i)}{\sum y^2{}_i}$$

$$\boxed{\Rightarrow r^2 \sum y^2{}_i = b\sum x_i y_i}$$

ومن خلال المعادلة الخاصة بمجموع المربعات الكلية (SCT=SCE+SCR) تصبح لدينا المعادلة من الشكل التالي والتي من خلالها يتم تحديد معامل التحديد (R^2):

$$\sum y_i{}^2 = b\sum x_i y_i + \sum e_i{}^2$$

$$\Rightarrow \sum y_i{}^2 = r^2 \sum y_i{}^2 + \sum e_i{}^2$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{\sum y_i{}^2 - \sum e_i{}^2}{\sum y_i{}^2}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{SCT - SCR}{SCT}$$

$$\boxed{\Rightarrow r^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} = \frac{SCE}{SCT}}$$

4-3- إختبار معنوية المعلمات المقدرة بالنسبة للنموذج الخطي البسيط : في هذه الحالة نستخدم اختبار ستيودنت (Student) لقياس معنوية المعلمات المقدرة .

4-3-1- إختبار ستيودنت (Test de Student) : يبين اختبار ستيودنت (T) مدى معنوية المعلمات المقدرة، ولهذا الإختبار قيمتين :

- قيمة محسوبة نرمز لها بالرمز (t_c)
- قيمة مجدولة نرمز لها بالرمز (t_{tab})

أ) **القيمة المحسوبة (t_c)** : وتعتمد على قيمة المعلمة المقدرة a و b وانحرافهما المعياري، ونقوم بحساب (t_c) على النحو التالي :

$$t_{c(a)} = \frac{a}{\delta_a}$$

$$t_{c(b)} = \frac{b}{\delta_b}$$

حيث من بين المميزات العددية للمعلمتين a وb نجد :

$$\delta_a = \sqrt{V(a)}$$

$$\Rightarrow V(a) = V(\varepsilon_i)(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{V(X)}$$

$$\delta_b = \sqrt{V(b)}$$

$$\Rightarrow V(b) = \frac{V(\varepsilon_i)}{\sum x_i^2} = \frac{V(\varepsilon_i)}{V(X)}$$

حيث : $$V(\varepsilon_i) = \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}$$

أ) **القيمة المجدولة (t_{tab})** : وتعتمد على مستوى المعنوية وعدد درجات الحرية:

– **مستوى المعنوية** : فهو يحدد من طرف الباحث حسب أهمية الدراسة ولدينا عادة مستوى معنوية (α) تحدد ب : 1 % ، 5 % ،10 % ويسمى باحتمال الخطأ، أما الإحتمال المعاكس ونرمز له بالرمز ($1-\alpha$) فيسمى بمستوى الثقة (99 % ، 95 % ،90 %) وعادة ما تتم الدراسات الاحصائية عند مستوى معنوية α = 5% اي مستوى ثقة يقدر بـ 95% =($1-\alpha$) .

– **درجة الحرية** : فهي عبارة عن الفرق بين حجم العينة وعدد المعلمات المقدرة ($n-k$) أي حجم العينة مطروح منه عدد القيود أو المعالم التي يتم تقديرها .

مثال : ليكن لدينا 03 أعداد شرط أن يكون مجموعها يساوي 10 وبالتالي الباحث له الحق في اختيار الرقم الأول والثاني (مثلا : 3+2) ولكن الرقم الأخير يجب ان يكون يساوي 5 (قيد) ، وبالتالي لدينا حرية اختيار رقمين فقط

(2) ، اي درجة الحرية تساوي حجم العينة (أعداد3=n) مطروح منه عدد القيود (في هذا المثال لدينا قيد واحد فقط (1) وبالتالي : درجة الحرية هي $n-1 = 3-1 = 2$

4-3-2- إختبار الفرضيات الخاص بمعنوية المعلمات المقدرة : إن اختبار الفرضيات في الاستدلال الاحصائي ينتج عنه اتخاذ القرار (القبول أو الرفض) بالنسبة للفرضية، ويرمز للفرضية الاحصائية بالرمز (H) حيث لدينا :

H_0: فرضية العدم (الصفرية)
H_1: الفرضية البديلة

ومن أجل القيام باختبار الفرضيات نحتاج الى الخطوات التالية :

- ✓ تحديد الفرضيات
- ✓ تحديد قاعدة القرار
- ✓ حساب القيمة الإسمية (t_c)
- ✓ حساب القيمة المجدولة (t_{tab})
- ✓ إتخاذ القرار

- تحديد الفرضيات : صياغة الفرضيات الخاصة بدراسة معنوية المعلمات المقدرة تكون من الشكل التالي والخاصة بالثابت والميل :

$$\begin{cases} H_0 : \alpha = 0 \ ; \ \beta = 0 \\ H_1 : \alpha \neq 0 \ ; \ \beta \neq 0 \end{cases}$$

- تحديد قاعدة القرار : في هذه الحالة نرتكز على دالة التوزيع لستيودنت والتي تعتبر دالة متناظرة وبالتالي تحديد منطقة الرفض والقبول يكون من الشكل التالي :

- إذا كانت: $t_{tab} < /t_c/$ ⟵ نرفض H_0 ونقبل H_1
- إذا كانت: $t_{tab} > /t_c/$ ⟵ نقبل H_0 ونرفض H_1

– حساب القيمة الإسمية (t_c) : لحساب القيمة الاسمية لكل من المعلمتين المقدرتين a و b نستخدم العلاقة الحسابية التي تطرقنا اليها سابقا على النحو التالي :

$$t_{c(a)} = \frac{a}{\delta_a}$$

$$t_{c(b)} = \frac{b}{\delta_b}$$

– حساب القيمة الجدولية (t_{tab}) : وهي قيمة يتم استخراجها من الجول الإحصائي الخاص بتوزيع ستيودنت حيث : $t_{tab} = t_{(\alpha/2\ ;n-2)}$

– إتخاذ القرار : وبالارتكاز على قاعدة القرار حيث إذا كانت :

– إذا كانت: $t_{tab} < /t_c/$ ⟵ نرفض H_0 ونقبل H_1 أي نقبل فرضية $H_1 : \alpha \neq 0 \ ; \beta \neq 0$
وبالتالي نقول أن المعلمات المقدرة لها معنوية (النموذج مقبول احصائيا) .

– إذا كانت: $t_{tab} > /t_c/$ ⟵ نقبل H_0 ونرفض H_1 أي نقبل فرضية $H_0 : \alpha = 0 \ ; \beta = 0$
وبالتالي نقول أن المعلمات المقدرة ليس لها معنوية (النموذج غير مقبول احصائيا) .

5 – التنبؤ : بعد القيام بالمراحل السابقة الذكر والخاصة بصياغة وبناء نموذج خطي بسيط والقيام بعملية التقدير ودراسة صلاحية النموذج المقدر، تأتي في المرحلة الأخيرة عملية التنبؤ وذلك بايجاد قيم المتغير التابع Y بتغيير قيم المتغير المستقل X ، واذا ارتكزنا على النموذج الخطي البسيط ولنفترض أننا نعرف القيمة المستقبلية لX في فترة التنبؤ ونرمز لها بالرمز X_{t+h} فاذا فرضنا أن البناء الهيكلي للمعادلة لا يتغير في المستقبل، تكون قيمة المتغير التابع Y في هذه الفترة t+h كما يلي :[1]

$$Y_{t+h} = \alpha + \beta X_{t+h} + u_{t+h}$$

1 – محمد شيخي، دروس وأمثلة محلولة في الإقتصاد القياسي ، جامعة قاصدي مرباح (ورقلة) ، الطبعة الأولى 2010-2011، ص 22.

حيث h يسمى أفق التنبؤ و Y_{t+h} يعبر عن التنبؤ النظري و t تعبر عن حجم العينة (t=1,2……T)
ومن خلال هذا النموذج المستخدم في التنبؤ بالقيمة Y يجب الإعتماد على المعلمات المقدرة لـ α و β وهما على التوالي a و b لكي نقوم بتقدير القيمة Y_{t+h} حيث أن هذه القيمة هي وسط Y الموافق لـ Y_{t+h} أي :

$$E(Y_t) = \alpha + \beta X_t$$
$$E(Y_{t+h} X_{t+h}) = \alpha + \beta X_{t+h}$$

بالإضافة الى أن الخطأ العشوائي u_{t+h} هو متغير عشوائي غير مشاهد، ولهذا بعد تقدير α و β و تقدير القيمة Y_{t+h} حيث أن هذه القيمة هي وسط Y الموافق لـ Y_{t+h} فيكون المقدر الطبيعي للتنبؤ من الشكل التالي :

$$\hat{Y}_t(h) = a + bX_{t+h}$$

ويعتبر هذا المقدر والذي يسمى بالتنبؤ التقديري هو مقدر غير متحيز لـ $E(Y_{t+h} X_{t+h})$ ويسمى بأفضل تنبؤ خطي غير متحيز .