برنامج مقياس رياضيات المؤسسة

فصل تمهيدي

الفصل الأول: البرمجة الخطية

- صياغة المشكلة (المسألة)
- الحل البياني
- الحل الرياضي (طريقة السمبلكس)
- المسألة الثنائية (النموذج المرافق)
- تحليل الحساسية

الفصل الثاني: نماذج النقل

فصل تمهيدي

1- مفهوم رياضيات المؤسسة :

- رياضيات المؤسسة هي تطبيق علمي للطرق الرياضية و الإحصائية من أجل حل مختلف المشاكل الإدارية و الاقتصادية، التي تواجه متخذ القرار.
- هي استخدام الأساليب و الأدوات الكمية من أجل علاج مختلف المشاكل التي تتميّز بمحدودية الموارد وتعدد البدائل.
- هي التحضير العلمي لعملية اتخاد القرار .

2- أساليب رياضيات المؤسسة :

تتميز رياضيات المؤسسة بالعديد من الأساليب المستخدمة في دراسة مختلف المشاكل الإدارية، لكل منها مجاله الخاص به، نذكر من بينها: البرمجة الخطية، نماذج النقل... إلخ

3- بعض المفاهيم المستخدمة في صياغة و معالجة مسائل البرمجة الخطيّة :

قبل الخوض في الحديث عن الكيفية التي تتم بها صياغة و معالجة مثل هذه المسائل، تجدر بنا الإشارة إلى بعض المفاهيم المستعملة في ذلك:

3-1 النموذج (*Le modèle*):

يُعرّف النموذج على أنه الطبيعة الرياضية لمشكل ما.

3- 2 النمذجة (*La modélisation*):

و يقصد بعملية النمذجة صياغة و كتابة مشكل ما في شكل رياضي.

3-3 البرمجة (*La programmation*):

و نعني بها التخطيط لتحقيق هدف معين، يتمثل في **الحل الأمثل**.

3-4 الخطية (*Linéaire*):

نعني بها أن العلاقة بين متغيرات النموذج هي علاقة خطية، أي أن أس متغيرات النموذج يساوي الواحد.

الفصل الأول: البرمجة الخطيّة

1- نشأة البرمجة الخطية :

خلال الحرب العالمية الثانية، نتيجة محدودية الموارد العسكرية، كلِّفت الحكومة البريطانية فريقاً من كبار العلماء بدراسة مسائل كيفية توزيع مواردها العسكرية، وما يتناسب مع أفضل وضع دفاعي جوي وبري، ولقد أطلق على دراسات هذا الفريق اسم بحوث العمليات أو البحث العملياتي. ثم أخذت هذه التسمية تطلق على كافة الأبحاث والدراسات التي تتعامل مع مسائل البرمجة أو التوزيع ومسائل اتخاذ القرار. وقد حثَّت النتائج المشجعة لفريق بحوث العمليات البريطاني الإدارة العسكرية الجوية الأمريكية على تكوين فريق مشابه للقيام بالدراسات اللازمة في هذا المجال. فقد وجدت هذه الفرق أن أساليب مسائل التفضيل التقليدية، كطريقة مضاريب لاغرانج مثلاً، ليست ذات فائدة كبيرة في حل مسائل البرمجة الخطية، مما استوجب إيجاد أساليب أكثر فعاليّة. في عام 1947 م طور جورج دانتزغ عضو الفريق الأمريكي لبحوث العمليات الطريقة المبسطة (السمبلكس) لحل مسألة البرمجة الخطية؛ لكن لم تنشر تفاصيل هذه الطريقة إلا في عام 1956م. وبعد نشر الطريقة المبسطة (السمبلكس) حدث تسارع كبير في استخدام وتطوير البرمجة الخطية. ومن المشاركات التطويرية المهمة في ذلك المجال أعمال جال Gal التي قام بها وحده أو بمشاركة آخرين معه، إذ قاموا بصياغة المسألة الثنائية لمسألة البرمجة الخطية. وحاليا، تستخدم البرمجة الخطية في مختلف المجالات الصناعية الاقتصادية ، الخدماتية والعسكرية.

2- تعريف البرمجة الخطية :

- **البرمجة الخطية** بالإنجليزية (Linear programming) : هي أسلوب أساسي ومهم يساعد متخذي القرار على اتخاذ قرارات صحيحة وبطريقة علمية.
- طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة من أجل تحقيق هدف معين يكون من المستطاع التعبير عنه إضافة الى القيود التي تحد من القدرة على تحقيقه في صورة معادلات أو متباينات خطية .
- عبارة عن أداة أو وسيلة رياضية تساهم في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بتوزيع الموارد المتاحة (البشرية و المادية) بين الاستخدامات المختلفة بغية تحقيق هدف محدّد (أقصى عائد أو أدنى تكلفة) ضمن مجموعة من القيود أو المحدّدات .
- تعرّف البرمجة الخطية على أنها أسلوب رياضي يهتم بتخصيص الموارد المتاحة بشكل أمثل على الاستخدامات المختلفة، بهدف تعظيم الأرباح أو تدنية التكاليف.
- الأسلوب الرياضي الذّي يهدف الى تعظيم Maximiser أو تصغير Minimiser دالة خطية تسمّى دالة الهدف ومحدّدة في وجود حدود معروفة تسمّى القيود.

- كما تعرّف على أنها أسلوب رياضي يساعد على اتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع أو التخصيص الأمثل لمجموعة من الموارد المحدودة على مجموعة من الاستخدامات المتعددة.
- إذن البرنامج الخطي هو استمثال optimization تعظيم أو تقليل دالَّة خطية، تحت قيود خطية.

3- استخدامات البرمجة الخطية :

تستخدم البرمجة الخطية في الكثير من المجالات (الصناعية ، الاقتصادية ، الخدماتية والعسكرية) بغرض إيجاد أفضل الحلول لها مما يجعلها أداة هامة في يد صانع القرار . تستخدم البرمجة الخطية في ما يلي :

- المساعدة في اتخاذ القرارات المختلفة المتعلقة بالوظائف الرئيسية للمؤسسة.
- تنظيم العمليات الإنتاجية و الاختيار بين طرق الإنتاج المختلفة عن طريق إيجاد التوزيع الأمثل لمختلف عناصر الإنتاج (موادّ ، عمال ، الات ...الخ) على مختلف العمليات الصناعية بما يسمح بتحقيق أهداف المؤسسة.
- تحديد طرق التوزيع المثلى (المساهمة في تحديد أفضل الطرق لتوزيع الإنتاج)
- التخطيط و الرقابة على الإنتاج.
- تسمح البرمجة الخطية أيضا بمراعاة عنصر الطلب (السوق) ومن ثم تحديد برامج الإنتاج و المخزون في كلّ فترة الأمر الذي يؤدّي الى تخفيض تكلفة الإنتاج و التخزين الى أدنى مستوى ممكن.
- تسمح البرمجة الخطية بتحديد أفضل الطرق لتلبية الاحتياجات المالية للمؤسسة القصيرة المدى.
- تسمح البرمجة الخطية بتحديد المبالغ التي يجب اقتراضها في كلّ فترة من كلّ مصدر (البنك، الموردين).
- تحديد برامج انتاج بما يضمن تقليل التكاليف وتعظيم الأرباح.

تستخدم البرمجة الخطية في ميدان العلوم الاقتصاديّة ، التجاريّة و علوم التسيير في حالتين :

- **في حالة التعظيم :** تعظيم الأرباح، تعظيم الإنتاج، تعظيم طاقات التخزين.....الخ
- **في حالة التقليل (التصغير) :** تقليل التكاليف، تقليل الخسائر.....الخ

4- فوائد البرمجة الخطية :

للبرمجة الخطية فوائد عديدة نذكر منها :

- ترجمة المشاكل الواقعية في شكل رياضي مما يسمح بمعالجة عدد كبير من المتغيرات و التعبير عنها في شكل رياضي مبسط.

- تحقيق أكبر قدر ممكن من الأرباح أو تخفيض أكبر قدر ممكن من التكاليف.
- وسيلة مساعدة في اتخاذ القرارات الكمية باستخدام الأساليب والطرق العلمية الحديثة.
- تحقيق أفضل استغلال للطاقة المتاحة.
- استبعاد الحلول الغير منطقية والغير مقبولة والتي تعتبر غير ممكنة من جهة و التركيز على الحلول الممكنة فقط و اختيار أحسنها.
- انتاج حجم معين من بعض المنتوجات للوفاء باحتياجات معينة.

5- شروط استخدام البرمجة الخطية :

لاستخدام البرمجة الخطية يجب توفر مجموعة من الشروط نذكر منها :

- **العلاقة الخطية** : أي أن تكون العلاقة بين متغيرات المشكلة علاقة خطية، و هذا يعني أن تكون دالة الهدف و القيود المفروضة على المشكلة على هيئة معادلات و متباينات من الدرجة الأولى.
- **يجب أن يتوفر عنصر التأكدّ** : يفترض في النموذج الخطي أن يكون المستقبل معروف بشكل أكيد وهذا يعني أن النموذج يكون محدّد.
- **علاقة تأثير بين المجاهيل**: تتعلق كل من العلاقات الرياضية الخطية و متغيرات القرار في المسألة المدروسة ببعضها البعض بشكل وثيق، حيث أن أي تغيير من زيادة أو نقصان لأحد هذه المتغيرات يؤثر على مجموع المتغيرات من خلال تغيير بعضها أو كلها.
- **توفر البدائل** : يجب أن تكون هناك استخدامات متعدّدة أو متنافسة للموارد المتاحة وهذا يعني وجود عدد من المجاهيل تشكّل الغاية من حلّ النموذج الرياضي للبرنامج الخطّي.
- **إتباع شرط عدم سلبية متغيرات القرار** : أي أن كل المتغيرات التي تدخل ضمن دالة الهدف و معادلات و متباينات نموذج البرمجة الخطية يجب أن تكون غير سالبة (أي أكبر أو تساوي الصفر)، إذ لا يمكن أن يكون حجم الإنتاج على سبيل المثال سالباً بأي حال من الأحوال.

6- عناصر البرمجة الخطية :

- **دالة الهدف** : ان الهدف الذي نسعى الي الوصول اليه من وراء حلّ المشكلة يتمثّل في الوصول الى الأمثليّة L'optimalité والتي تأخذ أحد الوجهين :

تعظيم Maximisation : (الأرباح، العوائد، المبيعات)

تدنية (تقليل) Minimisation : (تكاليف ، خسائر، الزمن ، المخاطرة)

يمكن التعبير عن هذا الهدف بمعادلة رياضية تسمّى دالة الهدف.

- **القيود :** تعكس القيود في معظم الحالات محدوديّة الموارد وتعبّر عن مجموعة المحدّدات التّي لا يستطيع متخذ القرار التحكّم فيها.
- **المتغيّرات :** تعبّر عن متغيّرات القرار وهي المجاهيل التّي تعبّر عن الشيء المطلوب تحديده في المشكلة قيد البحث كما يجب أن تكون كلّ المتغيّرات في البرنامج الخطّي غير سالبة أي يجب أن تكون موجبة أو معدومة.

7- فرضيات البرمجة الخطية:

تستند البرمجة الخطية في أساسها النظري إلى مجموعة من الافتراضات الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها، و التي يمكن إجمالها فيما يلي:

- **الخطية:** أي أن تكون العلاقة بين متغيرات المشكلة علاقة خطية، و هذا يعني أن تكون دالة الهدف و القيود المفروضة على المشكلة على هيئة معادلات و متباينات من الدرجة الأولى.
- **عدم السلبية:** و تعني أن كل المتغيرات التي تدخل ضمن دالة الهدف و معادلات و متباينات نموذج البرمجة الخطية يجب أن تكون غير سالبة (أي أكبر أو تساوي الصفر)، إذ لا يمكن أن يكون حجم الإنتاج على سبيل المثال سالباً بأي حال من الأحوال.
- **التأكد التام:** أي أن جميع عناصر المشكلة محدودة و مؤكدة، فتقنية البرمجة الخطية تقتصر في تطبيقها على تلك المشاكل التي تتضمن اتخاذ القرار في ظل التأكد التام، فالشخص القائم بتعريف المشكلة لا تواجهه عملية التنبؤ أو التخمين، حيث أنه يُفترض العلم التام بالظروف و العلاقات التي سوف تسود في المستقبل، لذلك يجب أن تكون جميع معاملات المتغيرات في المسألة مؤكدة و ثابتة.
- **القابلية للتجزئة:** أي أن حل مشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة، و هذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار، و إذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى استخدام البرمجة بالأعداد الصحيحة أو الرقمية.
- **التناسبية:** و تعني أن كل وحدة من وحدات الإنتاج المتماثل تستخدم الكمية نفسها من الموارد المتاحة، فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة من منتج معين، فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا الإنتاج.
- **الإضافية:** و تعني أن مجموع كمية الموارد المستخدمة لكل الأنشطة يجب أن يساوي مجموع الموارد المستخدمة في كل نشاط على انفراد، فإذا كنا ننتج أربعة منتجات و كان الربح الناجم عن بيع وحدة واحدة من كل هذه المنتجات هو 8، 10، 12، 6 وحدات نقدية على التوالي، فإن إجمالي الربح الناجم عن إنتاج و بيع ثلاث وحدات من كل منتج هو 3 (8+10+12+6) = 108 وحدات نقدية.

8- الشكل العامّ لنموذج البرمجة الخطيّة :

يعدّ النموذج الرياضي ترجمة رياضيّة للمشكلة المراد حلّها والمكوّنة من دالّة الهدف، القيود والمتغيّرات. يمكن صياغة النموذج الرّياضي على الشّكل التّالي :

دالّة الهدف تأخذ الشّكل التّالي :

$$Opt\ \ F(x)\ \ =\ \ \sum_{j=1}^{n} C_j\ \ X_j$$

Opt : تعني الأمثلية (*Optimalité*) : أي إما التعظيم (*Max*) أو التخفيض (*Min*)

C_j : معاملات دالة الهدف، أي إما العائد الوحدوي أو التكلفة الوحدوية لكل منتج.

X_j : رموز للكميات (عدد الوحدات) المنتجة لكل منتج، و هي المجاهيل التي نبحث عنها.

j : مؤشر لعدد متغيرات (مجاهيل) النموذج و المقدرة بـ*(n)*.

القيود: و هي عبارة عن الشروط (الظروف) التي تتواجد فيها المؤسسة، و يعبر عنها رياضيا في شكل معادلات أو متراجحات ذات الصيغة الرياضية التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \ X_j\ \geq\ b_i$$

أو

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \ X_j\ \leq b_i$$

حيث أن:

a_{ij} : المعاملات الفنية، أي الكميات المستهلكة من الموارد (الطاقات الإنتاجية) للإنتاج الوحدوي من المنتجات.

b_i : الكميات المتاحة من الموارد.

i : عدد الأسطر، و هي بعدد القيود (*m*).

j : عدد الأعمدة، و هي بعدد المتغيرات أي المجاهيل (*n*).

قيود عدم السلبية: أي أن جميع قيم المتغيرات يجب أن تكون موجبة أو منعدمة، لأنه لا يمكن إنتاج منتجات سالبة.

9- صيغ النماذج الخطيّة:

يمكننا أن نميّز بشكل عامّ بين 3 صيغ : النظاميّة (القانونيّة)، القياسيّة و الصّيغة المختلطة

1-9 الصّيغة القانونيّة (النظاميّة) : *Forme canonique*

تعتبر هذه الصّيغة الشّكل الأوّلي الذّي يأخذه النموذج الرياضي عند تشكيل المسألة رياضيا و تأخذ مسألة البرمجة الخطيّة هذه الصّيغة اذا كانت :

- جميع متغيّرات القرار غير سالبة
- جميع متراجحات القيود من نوع واحد (كلّها من نوع أقلّ أو يساوي أو من نوع أكبر أو يساوي) أي هي الصيغة التي تحتوي على إشارتي $\leq$ أو $\geq$ فقط.
- إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أقل أو تساوي فإننا نبحث عن التعظيم (Max).
- أما إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أكبر أو تساوي، فإننا نبحث عن التخفيض (Min).
- كميّة الموارد المتاحة أو الطرف الأيمن من المتراجحة غير محدّد الإشارة.

يمكن تمثيل الصّيغة النظاميّة للنموذج الخطّي كمايلي :

في حالة التّعظيم :

دالّة الهدف :

$$Max\ (Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j\ X_j$$

القيود

$$\sum_{J=1}^{n} a_{ij} . X_j \leq b_i \quad / i = 1, 2, 3...m$$

$$X_j \geq 0 \ / \ j = 1,2,....., n$$

في حالة التّقليل :

$$Min\ (W)\ =\ \sum_{j=1}^{n}\ _j\ X_j$$

القيود

$$\sum_{J=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j \geq b_i \qquad / i = 1, 2, 3 \ldots m$$

$$X_j \geq 0 \qquad / j = 1,2,\ldots\ldots, n$$

2-9 الصّيغة القياسية (Forme standard) :

هي الصيغة التي تحتوي على إشارة = فقط، كذلك هي الصّيغة التّي تستخدم لإيجاد الحلّ الأوّلي في البرنامج الخطّي. يأخذ البرنامج الخطّي الصّيغة القياسيّة (المعياريّة) اذا كانت : جميع متغيّرات القرار غير سالبة ،جميع القيود على شكل معادلات أو مساواة (ما عدا شرط عدم سلبيّة المتغيّرات الذّي يعتبر قيد أيضا) ، الطّرف الأيمن من القيد غير سالب.

دالة الهدف	$\text{Max } (Z) = \sum_{J=1}^{n} C_j \cdot X_j$
	$\text{Min } (w) = \sum_{J=1}^{n} C_j \cdot X_j$

القيود	$\sum_{J=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \ / i = 1, 2,3,\ldots., m$
شرط عدم السلبية	$X_j \geq 0 \ / \ j = 1,2,\ldots\ldots, n$

3-9 الصيغة العامة (المختلطة) (Forme mixte):

عادة ما تكتب البرامج الخطية في بداية وضعها على شكل صيغة عامة تحتوي على كل الإشارات ($\leq$، $=$، $\geq$).

أمثلة على كيفيّة صياغة (بناء) النموذج الرياضي لمسائل البرمجة الخطيّة

مثال رقم 1 :

تقوم مؤسسة ما بإنتاج الكراسي و الطاولات و بيعها للمدارس، حيث أن إنتاج كرسي واحد يتطلب 3 صفائح خشبية و 4 قطع من الحديد، و بعد بيعه يحقق ربحا قدره 250 دج، أما إنتاج الطاولة الواحدة فيتطلب 6 صفائح خشبية و 7 قطع من الحديد، و بعد بيعها تحقق ربحا قدره 430 دج، حيث أن المؤسسة لا تتوفر إلا على 180 قطعة خشبية و 320 قطعة من الحديد.

فما هي الكميات المثلى الواجب إنتاجها من كلا المنتجين، و التي تحقق لمؤسسة أكبر ربح ممكن؟

لدينا:

	الخشب	الحديد	الربح
الكراسي	3	4	250
الطاولات	6	7	430
الكمية المتاحة	180	320	

1- تحديد متغيرات القرار:

x_1: تمثل كمية الكراسي التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أكبر ربح؛

x_2: تمثل كمية الطاولات التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أعظم ربح.

2- صياغة دالة الهدف: إن ربح المؤسسة ناتج عن إنتاج و بيع كل من الكراسي و الطاولات و عليه:

2-1- إنتاج الكراسي:

إنتاج 1 كرسي يحقق ربحا قدره (1×250)

إنتاج 2 كرسي يحقق ربحا قدره (2×250)

إنتاج x_1 كرسي يحقق ربحا قدره $(250 \times x_1)$

2-2- إنتاج الطاولات:

إنتاج 1 طاولة يحقق ربحا قدره (1×430)

إنتاج 2 طاولة يحقق ربحا قدره (2×430)

إنتاج x_1 طاولة يحقق ربحا قدره $(430 \times x_2)$

و عليه و بما أن هذه المؤسسة تسعى إلى تعظيم أرباحها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$Max\ Z = 250\,x_1 + 430\,x_2$$

3- صياغة القيود الوظيفية: فعلى المؤسسة أن تحترم ما تتوفر عليه من مواد أولية عند تعظيمها لأرباحها.

3-1- المادة الأولية الأولى (الخشب): تمثل كمية الخشب الكلية أي مجموع الخشب المستخدم في إنتاج الكراسي ($3 \times x_1$) و الخشب المستخدم لإنتاج الطاولات ($6 \times x_2$) و الذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـ 180 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 180$$

3-2- المادة الأولية الثانية (الحديد): تمثل كمية الحديد الكلية أي مجموع الحديد المستخدم في إنتاج الكراسي ($4 \times x_1$) و الحديد المستخدم لإنتاج الطاولات ($7 \times x_2$) و الذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـ 320 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$4x_1 + 7x_2 \leq 320$$

4- قيود عدم سلبية المتغيرات: حيث أن إنتاج كل من الكراسي و الطاولات لا يمكن أن يكون بكميات سالبة، فإما أن يكون موجبا أو معدوما، و هو ما يُعبّر عنه بالصياغة التالية:

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

و عليه و بتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

دالة الهدف $\quad Max\ Z = 250x_1 + 430x_2$

تحت القيود $\quad Soumise\ aux\ contraintes$

قيد الخشب $\quad 3x_1 + 6x_2 \leq 180$

قيد الحديد $\quad 4x_1 + 7x_2 \leq 320$

قيد عدم سلبية المتغيرة الأولى $\quad x_1 \geq 0$

قيد عدم سلبية المتغيرة الثانية $\quad x_2 \geq 0$

مثال رقم 2 :

تعاقدت احدى المزارع مع احدى المؤسّسات الانتاجيّة المتخصّصة في صناعة الموادّ الغذائية للحيوانات وينصّ العقد على أنّ كلّ تركيبة وجبة غذائية يجب أن تحتوي على 70 وحدة من البروتين و 100 وحدة من الكربوهيدرات و 20 وحدة من الدّهون ولهذه المؤسّسة 3 أنواع من الغذاء تحتوي على المطلوب بمقادير مختلفة كما يوضّح ذلك الجدول التّالي :

الغذاء	البروتين	الكربوهيدرات	الدّهون	التكلفة
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5

المطلوب : صياغة المشكلة رياضيّا ؟

دالّة الهدف $\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3$

تحت القيود Soumise aux Contraintes

قيد البروتين $20X_1 + 30X_2 + 40X_3 \geq 70$

قيد الكربوهيدرات $50X_1 + 30X_2 + 20X_3 \geq 100$

قيد الدّهون $4X_1 + 9X_2 + 11X_3 \geq 20$

شرط عدم السّلبيّة $X_1, X_2, X_3 \geq 0$