طريقة الرسم البياني (Graphic Method)

1. طرق حلّ نماذج البرمجة الخطيّة:

- **طريقة الرسم البياني The Graphical Method**
- **الطريقة الجبرية Algebraic Method**
- **طريقة الصفّ البسيط السمبلكس The simplex Method**

2. خطوات الحل باستعمال الطريقة البيانية: تتمثل خطوات الحل وفق الطريقة البيانية فيما يلي:

1.2 الخطوة الأولى: يتم رسم القيود على أنها معادلات، و ذلك كما يلي:

بالنسبة للقيد الأول يتم افتراض أن أحد المتغيرين معدوم و بالتالي يمكن حساب المتغير الآخر، و نفس الشيء يتم افتراض أن المتغير الثاني معدوم ليتم حساب المتغير الأول، و بهذا تكون لدينا نقطتان يتم من خلالهما رسم مستقيم القيد الأول. و بنفس الطريقة يتم رسم مستقيمات باقي القيود و بتقاطعها يتم الحصول على منطقة الحلول المقبولة (الممكنة)، و يجب ملاحظة اتجاه المتراجحات أو القيود.

حيث أنه:

- إذا كانت العلاقة في القيد ≤ فإن اتجاه الحل سوف يكون باتجاه كبر المتغيرات.
- إذا كانت العلاقة في القيد ≥ فإن اتجاه الحل سوف يكون باتجاه صغر المتغيرات.
- إذا كانت العلاقة في القيد = فإن اتجاه الحل سوف يقع على الخط.

2.2 الخطوة الثانية: إيجاد قيمة دالة الهدف عند كل نقطة زاوية و نختار أفضلها في كلتا الحالتين، فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (*Max*) يتم اختيار أكبر قيمة، و اذا دالة الهدف تدنية (*Min*) يتم اختيار أصغر قيمة و من ثم تحديد الحل الأمثل.

3. شرح الطريقة البيانية بطريقة أو صيغة أخرى :

1.3 الطريقة البيانيّة لحلّ مشاكل البرمجة الخطيّة Graphic Solution of LP Problems

تعتبر طريقة الرسم البياني طريقة سهلة وبسيطة وواضحة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية خاصّة تلك المشاكل التّي لا يزيد فيها عدد المتغيّرات عن اثنين فقط والتّي تحتوي على عدد بسيط من القيود.

كما تفيد طريقة الرسم البياني كمقدّمة لدراسة طرق وأساليب أكثر تعقيدا في حلّ مشاكل البرمجة الخطية مثل السمبلكس.

عند انتهاج أسلوب الرسم البياني يجب اتّباع الخطوات التّالية :

- رسم المحور السّيني و الصّادي (XY) الجزء الموجب من كلّ منهما لتحقيق شرط عدم السّلبيّة.
- تحديد نقطتين لكلّ مستقيم (معادلة) بفرض مرّة $X_1 = 0$ و مرّة $X_2 = 0$
- رسم المستقيمات المعبّرة عن المعادلات (القيود).
- تحديد منطقة الإمكانيات المتاحة (منطقة الحلول المقبولة) وهذا هو هدف الرسم البياني.
- تعيين النقطة ضمن منطقة الحلول المقبولة (منطقة الإمكانيات المتاحة) التّي تعطي أفضل النتائج (أعلى عائد أو أقلّ تكلفة) وعادة ما تكون نقطة تقاطع المستقيمات، هذه النقطة تكون في حالة تعظيم الأرباح (Maximisation) أقرب ما يكون عن نقطة الأصل وتكون في حالة تقليل التّكاليف (Minimisation) أبعد ما يكون عن نقطة الأصل.

<u>مثال على الطريقة البيانية في حالة التعظيم Maximisation</u>

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

Soumise aux contraintes

$$2X_1 + X_2 \leq 9$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

المطلوب في المثال التّالي إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام الطريقة البيانيّة

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

1-1- القيد الأول: $2x_1 + x_2 \leq 9$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2x_1 + x_2 = 9$

نضع:

$x_1=0 \;\Rightarrow\; x_2=9 \;\Rightarrow\; x_2=9$ A (0, 9)

نضع:

$x_2=0 \;\Rightarrow\; 2x_1=9 \;\Rightarrow\; x_1=4.5$ B (4.5, 0)

1-2- القيد الثاني: $x_1+2x_2 \le 6$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $x_1+2x_2=6$

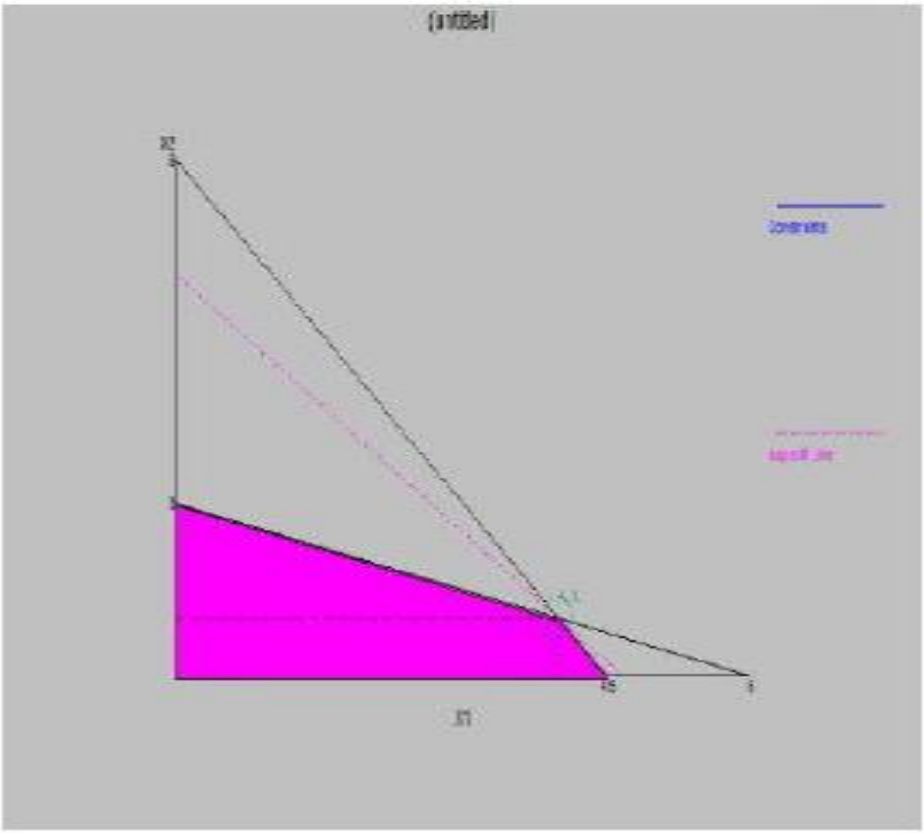
نضع:

$x_1=0 \;\Rightarrow\; 2x_2=6 \;\Rightarrow\; x_2=3$ C (0, 3)

نضع:

$x_2=0 \;\Rightarrow\; x_1=6 \;\Rightarrow\; x_1=6$ D (6, 0)

تحديد منطقة الحلول المقبولة :



و عليه فإن المنطقة OBCM هي منطقة الحلول المقبولة.

بالنسبة للنقطة M فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $2x_1 + x_2 = 9$ و $x_1 + 2x_2 = 6$ و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

M (4,1)

اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

$Z = 3x_1 + 2x_2$	الإحداثيات	النقاط الرأسية
$Z = 3(\mathbf{0}) + 2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$	(0, 0)	O
$Z = 3(\mathbf{4.5}) + 2(\mathbf{0}) = \mathbf{13.5}$	(4.5, 0)	B
$Z = 3(\mathbf{4}) + 2(\mathbf{1}) = \mathbf{14}$	(4, 1)	M
$Z = 3(\mathbf{0}) + 2(\mathbf{3}) = \mathbf{6}$	(0, 3)	C

النقطة M تمثّل الحلّ الأمثل لأنها تحقّق أعلى ربح ممكن .

القرار الاداري :

يجب انتاج 4 وحدات من المنتج الأول $X_1 = 4$

يجب انتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني $X_2 = 1$

من أجل تحقيق ربح قدره $Z = 14$

مثال على الطريقة البيانية في حالة التّقليل Minimisation

$$\text{Min } Z = 10 X_1 + 12 X_2$$

Soumise aux contraintes

$$20 X_1 + 10 X_2 \geq 100$$

$$10 X_1 + 10 X_2 \geq 80$$

$$10 X_2 \geq 40$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

المطلوب في المثال التّالي إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام الطريقة البيانيّة

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

1-1- القيد الأول: $20\,x_1 + 10\,x_2 \geq 100$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $20\,x_1 + 10\,x_2 = 100$

نضع:

$x_1 = 0 \Rightarrow 10\,x_2 = 100 \Rightarrow x_2 = 10$ A (0, 10)

نضع:

$x_2 = 0 \Rightarrow 20\,x_1 = 100 \Rightarrow x_1 = 5$ B (5, 0)

2-1- القيد الثاني: $10x_1 + 10\,x_2 \geq 80$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\,x_1 + 10\,x_2 = 80$

نضع:

$x_1 = 0 \Rightarrow 10\,x_2 = 80 \Rightarrow x_2 = 8$ C (0, 8)

نضع:

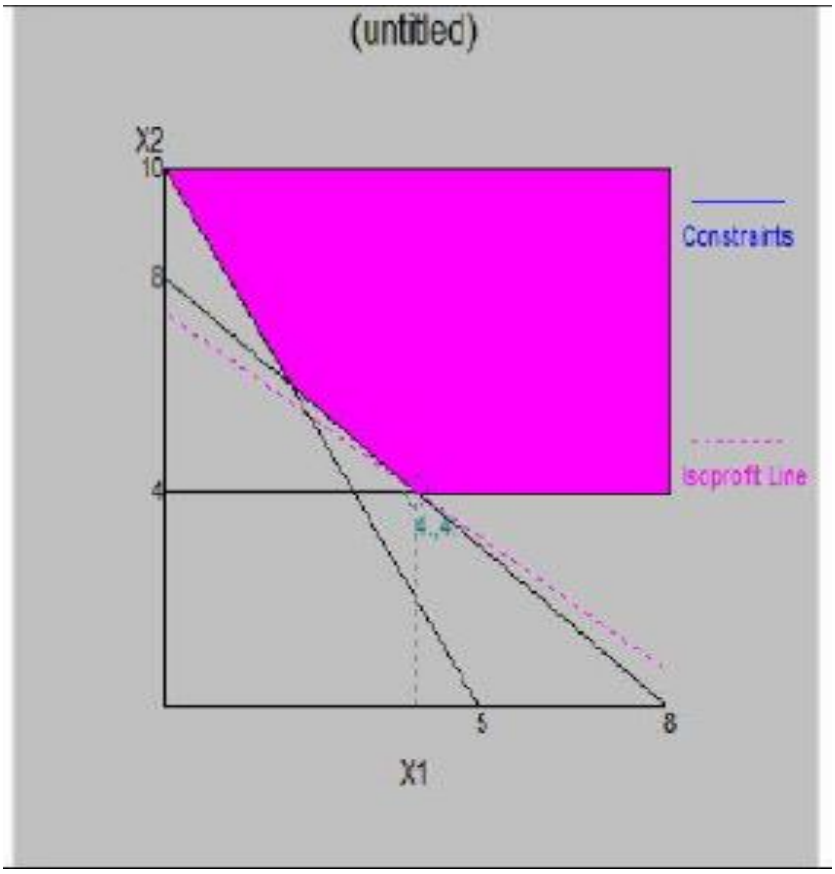
$x_2 = 0 \Rightarrow 10\,x_1 = 80 \Rightarrow x_1 = 8$ D (8, 0)

3-1- القيد الثالث: $10\,x_2 \geq 40$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\,x_2 = 40$

$X_2 = 4$

تحديد منطقة الحلول المقبولة



و عليه فإن المنطقة ABC هي منطقة الحلول المقبولة.

بالنسبة للنقطة B فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $100 = 20x_1 + 10x_2$ و $10x_1 + 10x_2 = 80$ و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

B (2, 6)

بالنسبة للنقطة C فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $40 = 10x_2$ و $10x_1 + 10x_2 = 80$ و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

C (4, 4)

اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

$Z = 10x_1 + 12x_2$	الإحداثيات	النقاط الرأسية
$Z = 10(\mathbf{0}) + 12(\mathbf{10}) = \mathbf{120}$	(0, 10)	A
$Z = 10(\mathbf{2}) + 12(\mathbf{6}) = \mathbf{92}$	(2, 6)	B
$Z = 10(\mathbf{4}) + 12(\mathbf{4}) = \mathbf{88}$	(4, 4)	C

النقطة C تمثّل الحلّ الأمثل لأنها تحقّق أقل تكلفة ممكنة .

القرار الإداري يجب انتاج 4 وحدات من المنتج الأول $X_1 = 4$ و 4 وحدات من المنتج الثاني $X_2 = 4$ لكي يحقّق أقلّ تكلفة ممكنة $Z = 88$