المركز الجامعي أحمد زبانة -غليزان
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
مقياس: رياضيات المؤسّسة

السنة الثانية علوم التّسيير

سلسلة 02 الطريقة البيانيّة في البرمجة الخطيّة

المطلوب في كلّ الأمثلة التالية إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام الطريقة البيانيّة

1/ Max $Z= 7x_1 + 5x_2$

Soumise aux contraintes

$$4X_1 + 3X_2 \leq 240$$
$$2X_1 + X_2 \leq 100$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

1-1- القيد الأول: $4\,x_1 + 3\,x_2 \leq 240$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $4\,x_1 + 3\,x_2 = 240$

نضع:

$x_1 = 0 \Rightarrow 3\,x_2 = 240 \Rightarrow x_2 = 80$ A (0, 80)

نضع:

$x_2 = 0 \Rightarrow 4\,x_1 = 240 \Rightarrow x_1 = 20$ B (60, 0)

1-2- القيد الثاني: $2\,x_1 + x_2 \leq 100$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2\,x_1 + x_2 = 100$

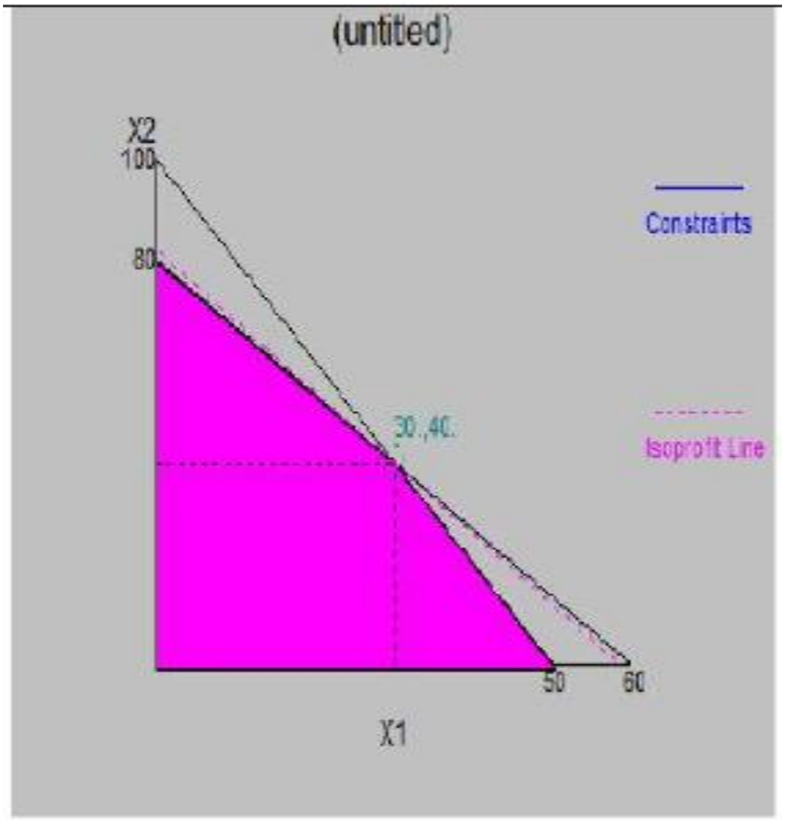
نضع:

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 100 \Rightarrow x_2 = 100$ C (0, 100)

نضع:

$x_2 = 0 \Rightarrow 2\,x_1 = 100 \Rightarrow x_1 = 50$ D (50, 0)

تحديد منطقة الحلول المقبولة



و عليه فإن المنطقة OAMD هي منطقة الحلول المقبولة.

بالنسبة للنقطة M فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $4x_1 + 3x_2 = 240$ و $2x_1 + x_2 = 100$ و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

M (30,40)

اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

$Z = 7x_1 + 5x_2$	الإحداثيات	النقاط الرأسية
$Z = 7(0) + 5(0) = 0$	(0, 0)	O
$Z = 7(0) + 5(80) = 400$	(0, 80)	A
$Z = 7(30) + 5(40) = 410$	(30, 40)	M
$Z = 7(50) + 5(0) = 350$	(50, 0)	D

النقطة M تمثّل الحلّ الأمثل لأنها تحقّق أعلى ربح ممكن .

القرار الإداري:

يجب إنتاج 30 وحدة من المنتج الأول $X_1 = 30$

وإنتاج 40 وحدة من المنتج الثاني $X_2 = 40$

لكي يحقق أكبر ربح ممكن بمقدار 410 دينار $Z = 410$

2/ Max $Z= 3X_1 + 2X_2$

Soumise aux contraintes

$2X_1 + X_2 \leq 150$

$2X_1 + 3X_2 \leq 300$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

1– التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

1–1– القيد الأول: $2x_1 + x_2 \leq 150$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2x_1 + x_2 = 150$

نضع:

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 150 \Rightarrow x_2 = 150$ A (0, 150)

نضع:

$x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 150 \Rightarrow x_1 = 75$ B (75, 0)

1–2– القيد الثاني: $2x_1 + 3x_2 \leq 300$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2x_1 + 3x_2 = 300$

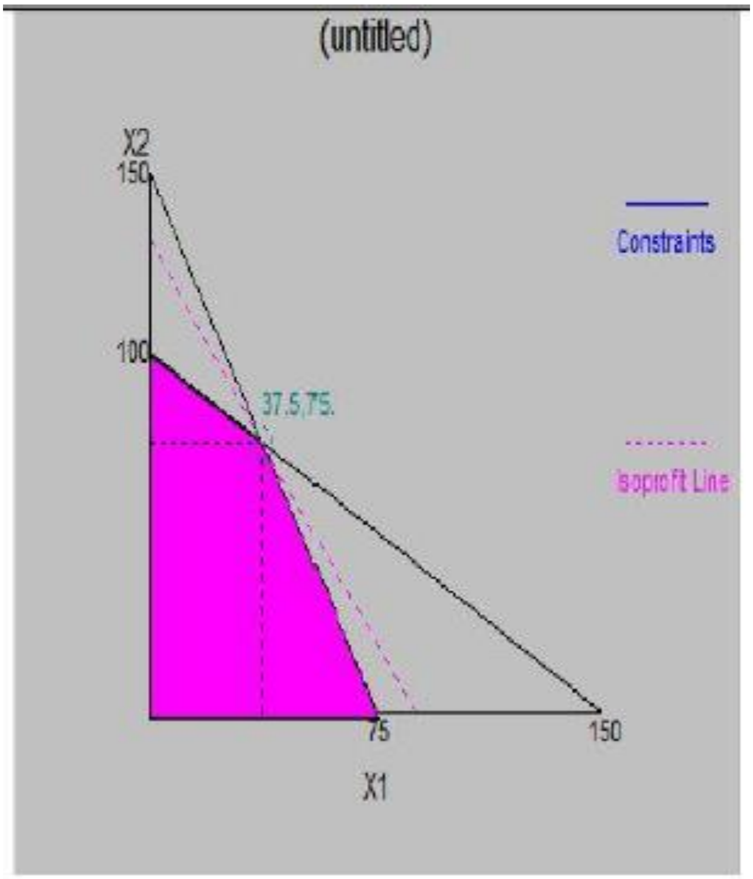
نضع:

$x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 300 \Rightarrow x_2 = 100$ C (0, 100)

نضع:

$x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 300 \Rightarrow x_1 = 150$ D (150, 0)

تحديد منطقة الحلول المقبولة



و عليه فإن المنطقة OCMB هي منطقة الحلول المقبولة.

بالنسبة للنقطة M فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $150 = 2x_1 + x_2$ و $2x_1 + 3x_2 = 300$ و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

M (37.5, 75)

اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

$Z = 3x_1 + 2x_2$	الإحداثيات	النقاط الرأسية
$Z = 3(\mathbf{0}) + 2(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$	(0, 0)	O
$Z = 3(\mathbf{0}) + 2(\mathbf{100}) = \mathbf{200}$	(0, 100)	C
$Z = 3(\mathbf{37.5}) + 2(\mathbf{75}) = \mathbf{262.5}$	(37.5, 75)	M
$Z = 3(\mathbf{75}) + 2(\mathbf{0}) = \mathbf{225}$	(75, 0)	B

النقطة M تمثّل الحلّ الأمثل لأنها تحقّق أعلى ربح ممكن .

و بعد إيجاد الحل الأمثل للنموذج، يمكن أن نخلُص إلى أن البرنامج الإنتاجي الأمثل للمؤسسة هو كالتالي:

$x_1 = 37.5$ أي على المؤسسة إنتاج 37.5 وحدة من المنتج الأول.

$x_2 = 75$ أي على المؤسسة إنتاج 75 وحدة من المنتج الثاني.

3/ $\quad Max\ Z = 1000\, x_1 + 1200\, x_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 10\, x_1 + 5\, x_2 \leq 200 \\ 2\, x_1 + 3\, x_2 \leq 60 \\ x_1 \leq 34 \\ x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1– التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

1–1– القيد الأول: $10\, x_1 + 5\, x_2 \leq 200$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\, x_1 + 5\, x_2 = 200$

نضع:

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\, x_2 = 200 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 40$ A (0, 40)

نضع:

$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 10\, x_1 = 200 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 20$ B (20, 0)

1–2– القيد الثاني: $2\, x_1 + 3\, x_2 \leq 60$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2\, x_1 + 3\, x_2 = 60$

نضع:

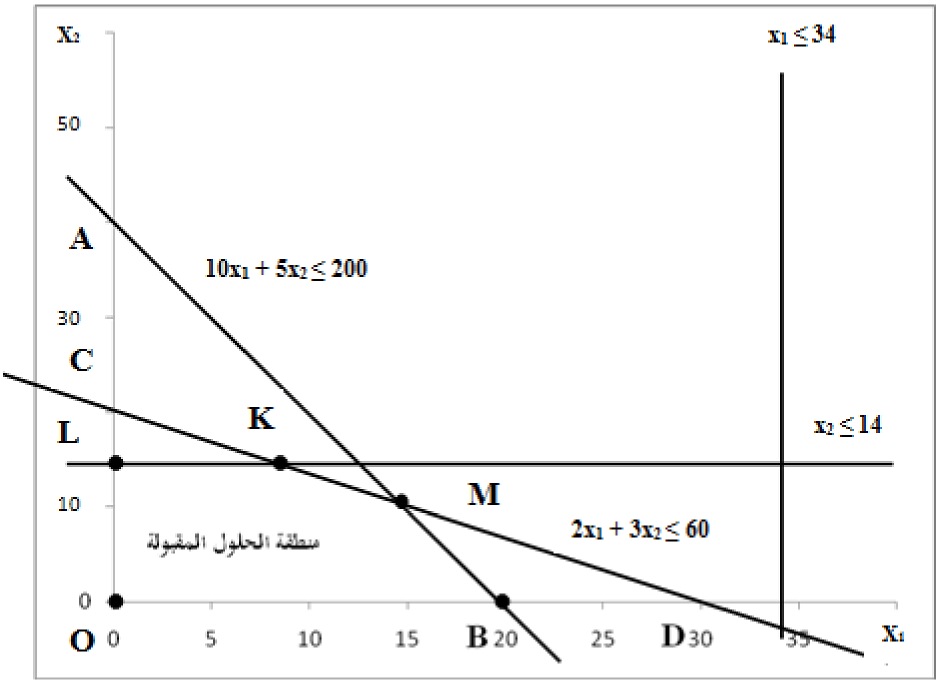
$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\, x_2 = 60 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 20$ C (0, 20)

نضع:

$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\, x_1 = 60 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 30$ D (30, 0)

هذا إضافة إلى تحويل القيدين الأخيرين إلى معادلات: $x_1 = 34$ و $x_2 = 14$، ثم تمثيلها جميعا على معلم متعامد و متجانس.

تحديد منطقة الحلول المقبولة



نسمي المنطقة OLKMB **منطقة الحلول المقبولة**، و هي تحتوي عدد لانهائي من النقاط، و التي تتوزع داخل المنطقة أو على حدودها، أو على النقاط الرأسية (*Points extrêmes*): O, L, K, M, B.

3– تحديد إحداثيات النقاط الرأسية و تقييم Z:

من الشكل أعلاه تتضح لنا إحداثيات النقاط:

$\boldsymbol{O}\ (0\ ,\ 0) \;\Rightarrow\; Z = 1000\ (\mathbf{0}) + 1200\ (\mathbf{0}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 0}$

$\boldsymbol{L}\ (0\ ,\ 14) \;\Rightarrow\; Z = 1000\ (\mathbf{0}) + 1200\ (\mathbf{14}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 16800}$

$\boldsymbol{B}\ (20\ ,\ 0) \;\Rightarrow\; Z = 1000\ (\mathbf{20}) + 1200\ (\mathbf{0}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 20000}$

أما النقاط M و K فيتم حساب إحداثياتها جبريا.

بالنسبة للنقطة M فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $2\,x_1 + 3\,x_2 = 60$ و $10\,x_1 + 5\,x_2 = 200$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = 200 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \;\ldots\ldots\ldots\; \times(-5) \end{cases}$$

بضرب المعادلة الثانية في (–5)، و جمع المعادلتين نحصل على:

$$10x_1 + 5x_2 + (-\,10x_1 - 5x_2) = 200 - 300$$
$$-\,10x_2 = 100 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_2 = 10}$$

بتعويض قيمة x_2 في إحدى المعادلتين (و لتكن المعادلة الثانية)، نحصل على:

$$2x_1 + 3(10) = 60 \Rightarrow 2x_1 = 60 - 30 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 15}$$

و منه:

$$\boldsymbol{M}\ (15\ ,\ 10) \Rightarrow Z = 1000\ (\mathbf{15}) + 1200\ (\mathbf{10}) \Rightarrow \boldsymbol{Z = 27000}$$

أما بالنسبة للنقطة K فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $x_2 = 14$ و $2x_1 + 3x_2 = 60$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$\begin{cases} x_2 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \end{cases}$$

بتعويض قيمة x_2 في المعادلة الثانية نحصل على:

$$2x_1 + 3(14) = 60 \Rightarrow 2x_1 = 60 - 42 = 42 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 9}$$

و منه:

$$\boldsymbol{K}\ (9\ ,\ 14) \Rightarrow Z = 1000\ (\mathbf{9}) + 1200\ (\mathbf{14}) \Rightarrow \boldsymbol{Z = 25800}$$

و عليه فإن الحل الأمثل هو النقطة: $\boldsymbol{M}\ (15\ ,\ 10)$.

و بعد إيجاد الحل الأمثل للنموذج، يمكن أن نخلُص إلى أن البرنامج الإنتاجي الأمثل للمؤسسة هو كالتالي:

$x_1 = 15$ أي على المؤسسة إنتاج 15 وحدة من المنتج الأول؛

$x_2 = 10$ أي على المؤسسة إنتاج 10 وحدات من المنتج الثاني.

4/ $\quad Min\ Z = 3x_1 + 3x_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 - x_2 \leq 9 \\ x_1 + 3x_2 \geq 17 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1– التمثيل البياني للقيود:

1–1– القيد الأول: $x_1 + x_2 = 9$

نضع:

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 9 \qquad$ A (0, 9)

نضع:

$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 9 \qquad$ B (9, 0)

1–2– **القيد الثاني**: $x_1 - x_2 = 9$

نضع:

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = - 9 \qquad$ C (0, - 9)

نضع:

$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 9 \qquad$ D (9, 0)

1–3– **القيد الثالث**: $x_1 + 3\, x_2 = 17$

نضع:

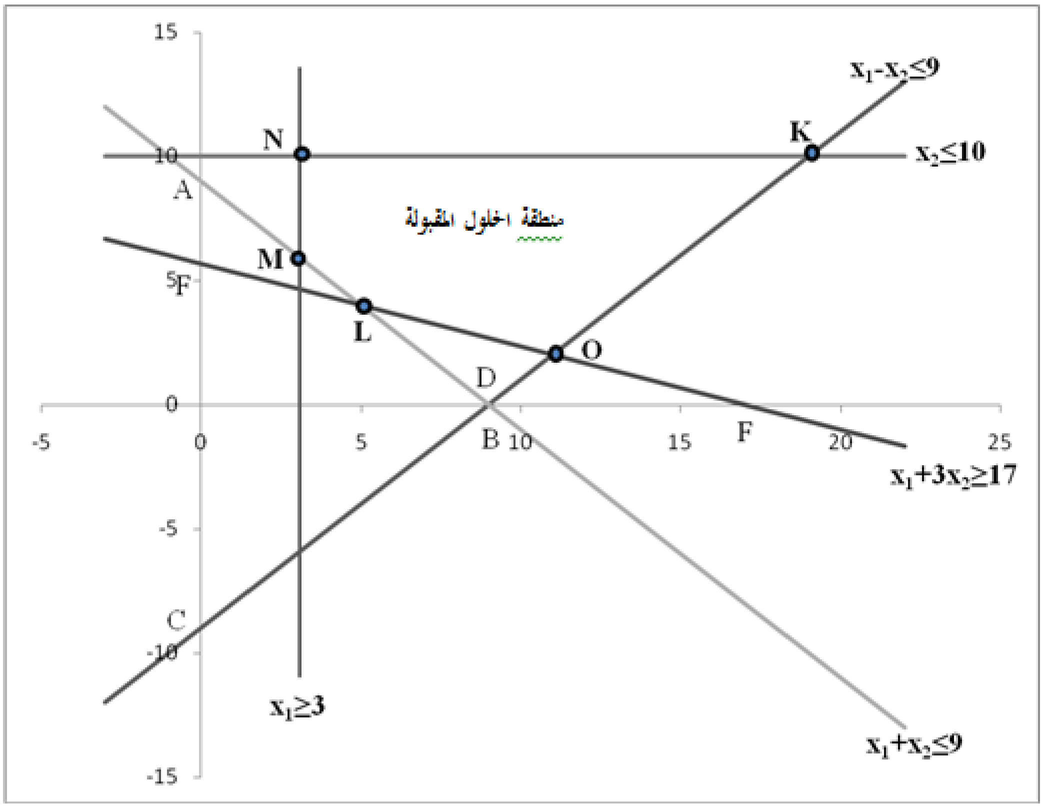
$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3/17 \qquad$ E (0, 3/17)

نضع:

$x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 17 \qquad$ F (17, 0)

هذا إضافة إلى تحويل القيدين الأخيرين إلى معادلات: $x_1 = 3$ و $x_2 = 10$ ، ثم تمثيلها جميعا على معلم متعامد و متجانس.

تحديد منطقة الحلول المقبولة



و عليه فإن المنطقة OLMNK هي منطقة الحلول المقبولة.

2– تحديد إحداثيات النقاط الرأسية و تقييم Z:

❖ **النقطة O**: هي عبارة عن تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 9 \text{ …………… } \times (3) \\ x_1 + 3x_2 = 17 \end{cases}$$

بضرب المعادلة الأولى في (3)، و جمع المعادلتين نحصل على:

$$3x_1 - 3x_2 + x_1 + 3x_2 = 27 + 17$$
$$4x_1 = 44 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_1 = 11}$$

بتعويض قيمة x_1 في إحدى المعادلتين (و لتكن المعادلة الأولى)، نحصل على:

$$11 - x_2 = 9 \;\Rightarrow -x_2 = 9 - 11 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_2 = 2}$$

و منه:

$$\boldsymbol{O}\,(11\,,2) \;\Rightarrow\; Z = 3\,(\boldsymbol{11}) + 3\,(\boldsymbol{2}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 39}$$

❖ **النقطة L**: هي عبارة عن تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \text{ …………… } \times (-3) \\ x_1 + 3x_2 = 17 \end{cases}$$

بضرب المعادلة الأولى في (–3)، و جمع المعادلتين نحصل على:

$$-3x_1 - 3x_2 + x_1 + 3x_2 = -27 + 17$$
$$-2x_1 = -10 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_1 = 5}$$

بتعويض قيمة x_1 في إحدى المعادلتين (و لتكن المعادلة الأولى)، نحصل على:

$$5 + x_2 = 9 \;\Rightarrow x_2 = 9 - 5 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_2 = 4}$$

و منه:

$$\boldsymbol{L}\,(5\,,4) \;\Rightarrow\; Z = 3\,(\boldsymbol{5}) + 3\,(\boldsymbol{4}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 27}$$

❖ **النقطة M**: هي عبارة عن تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$

بتعويض قيمة x_1 في المعادلة الثانية، نحصل على:

$$3 + x_2 = 9 \;\Rightarrow x_2 = 9 - 3 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_2 = 6}$$

و منه:

$$\boldsymbol{M}\,(3\,,6) \;\Rightarrow\; Z = 3\,(\boldsymbol{3}) + 3\,(\boldsymbol{6}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{Z = 27}$$

❖ **النقطة N**: هي عبارة عن تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

و منه:

$N\,(3\,,10) \;\Rightarrow\; Z = 3\,(\mathbf{3}) + 3\,(\mathbf{10}) \;\Rightarrow\; \mathbf{Z = 39}$

❖ **النقطة K**: هي عبارة عن تقاطع المستقيمين:

$$\begin{cases} x_2 = 10 \\ x_1 - x_2 = 9 \end{cases}$$

بتعويض قيمة x_2 في المعادلة الثانية، نحصل على:

$x_1 - 10 = 9 \;\Rightarrow\; x_1 = 9 + 10 \;\Rightarrow\; \mathbf{x_1 = 19}$

و منه:

$K\,(19\,,10) \;\Rightarrow\; Z = 3\,(\mathbf{19}) + 3\,(\mathbf{10}) \;\Rightarrow\; \mathbf{Z = 87}$

اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

$Z = 3x_1 + 3x_2$	الإحداثيات	النقاط الرأسية
$Z = 3(\mathbf{11}) + 3(\mathbf{2})=\mathbf{39}$	(11 , 2)	O
$Z = 3(\mathbf{5}) + 3(\mathbf{4})=\mathbf{27}$	(5 , 4)	L
$Z = 3(\mathbf{3}) + 3(\mathbf{6})=\mathbf{27}$	(3 , 6)	M
$Z = 3(\mathbf{3}) + 3(\mathbf{10})=\mathbf{39}$	(3 , 10)	N
$Z = 3(\mathbf{19}) + 3(\mathbf{10})=\mathbf{87}$	(19 , 10)	K

النقطتين L و M تمثّلان الحلّ الأمثل

L (5, 4) و M (3, 6)

القرار الإداري : يجب انتاج 5 وحدات من المنتج الأول $X_1 = \mathbf{5}$ و 4 وحدات من المنتج الثاني $X_2 = \mathbf{4}$

كما يجب انتاج 3 وحدات من المنتج الأول $X_1 = \mathbf{3}$ و 6 وحدات من المنتج الثاني $X_2 = \mathbf{6}$

أقلّ تكلفة ممكنة $Z = \mathbf{88}$

5/ $\quad$ $\text{Min } Z = 10\,X_1 + 12\,X_2$

Soumise aux contraintes

$$20\,X_1 + 10\,X_2 \geq 100$$
$$10\,X_1 + 10\,X_2 \geq 80$$
$$10\,X_2 \geq 40$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

1-1- القيد الأول: $20\,x_1 + 10\,x_2 \geq 100$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $20\,x_1 + 10\,x_2 = 100$

نضع:

$x_1 = 0 \Rightarrow 10\,x_2 = 100 \Rightarrow x_2 = 10$ A (0, 10)

نضع:

$x_2 = 0 \Rightarrow 20\,x_1 = 100 \Rightarrow x_1 = 5$ B (5, 0)

1-2- القيد الثاني: $10x_1 + 10\,x_2 \geq 80$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\,x_1 + 10\,x_2 = 80$

نضع:

$x_1 = 0 \Rightarrow 10\,x_2 = 80 \Rightarrow x_2 = 8$ C (0, 8)

نضع:

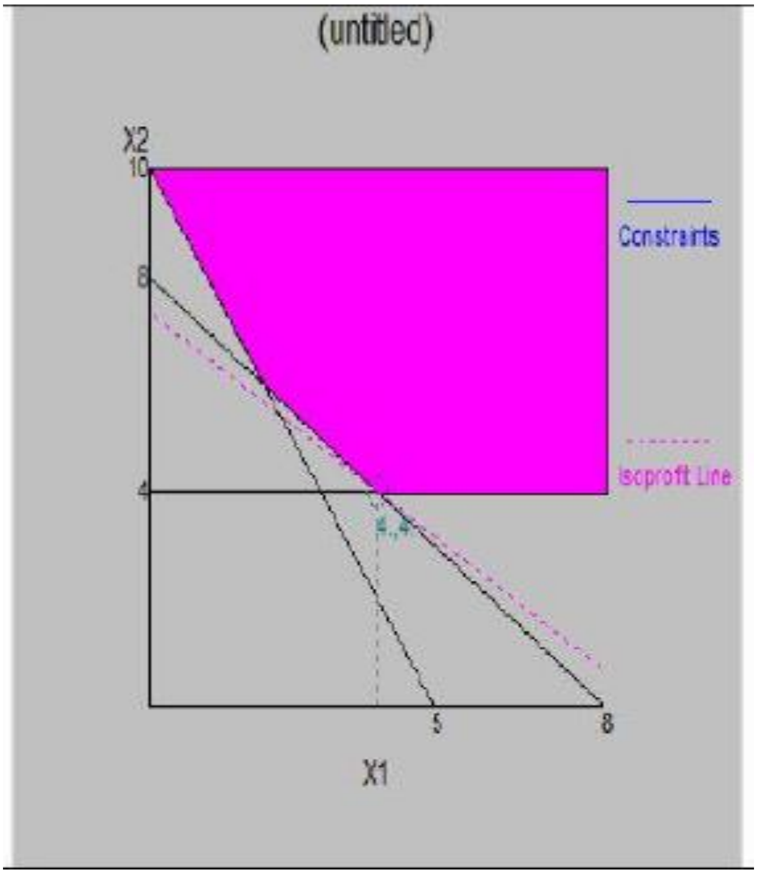
$x_2 = 0 \Rightarrow 10\,x_1 = 80 \Rightarrow x_1 = 8$ D (8, 0)

1-3- القيد الثالث: $10\,x_2 \geq 40$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\,x_2 = 40$

$X_2 = 4$

تحديد منطقة الحلول المقبولة



بالنسبة للنقطة B فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $20\ x_1 + 10\ x_2 = 100$ و $10\ x_1 + 10\ x_2 = 80$ و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

B (2, 6)

بالنسبة للنقطة C فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $10\ x_2 = 40$ و $10\ x_1 + 10\ x_2 = 80$ و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

C (4, 4)

اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

النقاط الرأسية	الإحداثيات	$Z = 10x_1 + 12x_2$
A	(0, 10)	$Z = 10(0) + 12(10) = 120$
B	(2, 6)	$Z = 10(2) + 12(6) = 92$
C	(4, 4)	$Z = 10(4) + 12(4) = 88$

النقطة C تمثّل الحلّ الأمثل لأنها تحقّق أقل تكلفة ممكنة .

القرار الإداري يجب انتاج 4 وحدات من المنتج الأول $X_1 = 4$ و 4 وحدات من المنتج الثاني $X_2 = 4$ لكي يحقّق أقلّ تكلفة ممكنة

$Z = 88$