1. عيوب الطريقة البيانية

1- ماذا يعاب على الرسم البياني في البرمجة الخطية :

- ليس بإمكانها حلّ المسائل المعقّدة ، تركّز على المسائل ذات متغيّرين فقط.
- قراءة التّناج على الرسم البياني قد تكون غير دقيقة.
- عند زيادة عدد القيود يصبح الرسم أكثر تعقيداً.
- أي تغيير في إشارة المتباينات في القيود يؤثّر دوماً في تحديد منطقة الحلول الممكنة.
- أي تغيير في إشارة المتباينة في القيد يؤثّر على منطقة الحلول المقبولة وبالتالي يؤثّر على القرار الإداري.
- ليس دائماً تكون نقطة تقاطع القيود هي الحلّ الأمثل.

2- حالات خاصّة من الطّريقة البيانية :

- التكرار أو التّفسّح Redundant , Degeneracy : أحد القيود لا يؤثّر على الحلّ.
- وجود أكثر من حلّ بديل Alternative Solution.
- لا توجد منطقة حلّ Infeasible Solution.
- منطقة حلّ غير محصورة Unbounded Solution Space.
- حالة الحلول المتعدّدة.
- حالة عدم الانتظام.
- حالة مسائل بدون حلّ ممكن.
- حالة مسائل بدون حلّ أمثل محدّد.

١١. طريقة السمبلكس

1- تعريف طريقة السمبلكس :

تستخدم طريقة السمبلكس في معالجة المسائل التي لا يمكن حلها بالطريقة البيانية لأن هذه الأخيرة لا يمكن أن تستعمل في حل المسائل التي تتوفر على متغيرات عددها أكبر من متغيرين أي ثلاثة متغيرات فأكثر. ولذلك تستخدم طريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة) التي قدمها **George Dantzig** سنة 1947 لمعالجة مختلف مسائل البرمجة الخطية مهما كان عدد متغيراتها (حتى المسائل ذات المتغيرين).

تقوم طريقة السمبلكس على فكرة إيجاد التحسن المستمر في دالة الهدف ، أي أننا نبدأ من نقطة الأصل (الصفر) ونتحرك في اتجاه تحسين دالة الهدف خطوة خطوة الى أن نصل الى الحل الأمثل الذي لا يمكن تحسين دالة الهدف بعده على الاطلاق. تعتمد هذه الطريقة لحل مسائل البرمجة الخطية على قاعدة أساسية تم استنتاجها سابقا في الطريقة البيانية والتي تنص على أن أي حل لمسألة البرنامج الخطي سيكون على أحد أركان منطقة الحلول الممكنة وبذلك تتجاهل هذه الطريقة الحلول الممكنة الأخرى وتركز على الأركان فقط.

2- خطوات حل السمبلكس :

- تحويل نظام البرمجة الخطية العادي الى الشكل القياسي (المعياري) **Standard Form**
- تحويل المتباينات الى معادلات و يتم ذلك بإضافة متغيرات وهمية **Slack Variable** رمزها **S** معناها الاقتصادي عبارة عن طاقة غير مستغلة و المتغيرات الوهمية لا تؤثر على الحل ولا تؤثر على دالة الهدف .

في حالة التّعظيم :

➤ رمز المتباينات اذا كان أقل أو يساوي نضيف متغير وهي $S \leq$ وهذا الشائع.

➤ رمز المتباينات اذا كان أكبر أو يساوي نطرح متغير وهي $S \geq$ وهذا الشاذ.

في حالة التقليل :

➤ رمز المتباينات اذا كان أقل أو يساوي نضيف متغير وهي $S \leq$ وهذا القيد ليس له تأثير في الحل.

➤ رمز المتباينات اذا كان أكبر أو يساوي نطرح متغير وهي و نضيف متغير اصطناعي $S + R \geq$

اذا كان القيد اشارته = نضيف متغير اصطناعي فقط $+ R$

المتغيرات الاصطناعية لا تؤثر على الحل و لكن تؤثر على دالة الهدف لذلك تضرب بحرف **M** وتضاف الى دالة الهدف.

3- ما هو الهدف من تحويل النموذج الأولي الى نموذج قياسي ؟

الهدف من تحويل نموذج البرمجة الخطية (النموذج الأولي) الى نموذج قياسي هو تسهيل عملية حلّه بالسّمبلكس.

4- ماهي طريقة التحويل للشكل القياسي ؟

- نقل جميع الحدود في دالة الهدف الى جهة Z حيث أنها تبقى دوما موجبة وتحوّل الى معادلة صفرية وتصبح معاملات المتغيرات الأساسية X_1, X_2 سالبة.
- تحويل القيود الى معادلات بعد إضافة المتغيرات الوهمية وتسمّى برقم القيد أو تطرح حسب نوع إشارة المتباينات في حالة ال Max .
- لكنّ في حالة Min تضرب القيود في M ثمّ تضاف الى دالة الهدف وتحوّل صفرية.

5- ما هو الفرق بين النموذج الأولي والنموذج القياسي ؟

- النموذج الأولي هو النموذج الأصلي المصاغ من المشكلة نفسها.
- النموذج القياسي هو النموذج المحوّل من النموذج الأولي من أجل حلّه باستخدام طريقة السّمبلكس.

6- ماهي خطوات الحلّ بطريقة السّمبلكس في حالة تعظيم الأرباح ؟

- 1- تحويل نموذج البرمجة الخطية العادي الى نموذج قياسي حسب شكل القيود:
  - رمز المتباينات اذا كان أقلّ أو يساوي نضيف متغيّر وهي $S \leq +$.
  - رمز المتباينات اذا كان أكبر أو يساوي نطرح متغيّر وهي $S \geq -$.
  - وتحويل دالة الهدف Z الى معادلة صفرية.
- 2- انشاء جدول ثمّ يتمّ ترتيب المعاملات ويسمّى جدول الحلّ الأساسي الأولي.
- 3- ننظر الى صفّ دالة الهدف (صفّ Z) ونختار أصغر قيمة سالبة من أجل تحديد عمود المتغيّر الداخلي (عمود الارتكاز).
- 4- نقوم باختيار عمود الارتكاز (العمود المحوري) أي عمود المتغيّر الداخلي الذي يتمّ العمل عليه وذلك بتحديد البؤرة وعناصر التبدّل.
- 5- يتمّ قسمة كميات الحلّ الموجودة في العمود الأيمن Solution على المعاملات المقابلة لها في عمود الارتكاز (العمود المحوري).

6- نختار أقل قيمة موجبة التي تظهر في عمود ال Ratio نترك السالب و الصفر و الغير معرف نختار الموجب فقط ، ويتم تحديد صف الارتكاز أو صف المتغير الخارجي.

7- تحديد البؤرة : وهي نقطة تقاطع عمود المتغير الداخلي في عمود الارتكاز مع صف المتغير الخارجي في صف الارتكاز.

8- نقوم بقسمة الصف بكامله على البؤرة وبالتالي ينتقل المتغير الداخلي ويصبح صف جديد في الجدول الثاني ويسمى بالمعادلة المحورية وتصبح البؤرة = 1

9- يتم تكوين الجدول الجديد بوضع المعادلة المحورية ويتم العمل عليها بإنشاء صفوف جديدة في الجدول الثاني، ننظر لكل عنصر من عناصر التبديل الموجودة في عمود الارتكاز ونستخدم القانون الاتي :

سالب عنصر التبديل * المعادلة المحورية + المعادلة القديمة (الأصلية في الجدول السابق) = معادلة جديدة (في الجدول الجديد)

10- يتم النظر في كل مرة الى صف دالة الهدف (صف Z) اذا كانت ارقام موجبة و اصفار يعني توصلنا الى الحل الأمثل أما اذا كانت قيم سالبة نعيد تكرار الخطوات مرة أخرى حتى نتوصل الى الحل الأمثل.

11- تكون القيم الموجودة في عمود الكميات Solution هي الحل الأمثل وبالتالي توصلنا الى إيجاد قيم X1 و X2 .

12- نعوض قيم X1 و X2 في دالة الهدف Z لنتأكد من الحل.

7- تعريفات هامة :

1-7 العنصر المحوري (البؤرة) Pivot Element :

هي القيمة التي يتقاطع فيها صف المتغير الخارجي Leaving Variable مع عمود المتغير الداخلي Entering Variable أو القيمة التي يتقاطع فيها صف الارتكاز مع عمود الارتكاز.

2-7 المعادلة المحورية Pivot Equation :

هي المعادلة أو الصف الناتج بعد قسمة صف المتغير الخارجي على العنصر المحوري (البؤرة) أو قسمة صف الارتكاز على العنصر المحوري (البؤرة).

بمعنى قسمة الصف الأصلي الأساسي على البؤرة.

3-7 عناصر التبديل Alternative Elements :

العنصر الذي يتم ضربه في المعادلة المحورية وهو موجود في عمود المتغير الداخلي (عمود الارتكاز) بخلاف البؤرة.

III. مثال تطبيقي على حالة التّعييم Maximisation

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 9X_1 + 7X_2 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ 2X_1 + 4X_2 &\leq 40 \\ X_1 + 3X_2 &\leq 30 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

المطلوب في المثال التّالي إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية (النموذج الأولي) الى الصيغة القياسية

$$\begin{aligned} Z - 9X_1 - 7X_2 &= 0 \\ 2X_1 + 4X_2 + S_1 + 0S_2 &= 40 \\ X_1 + 3X_2 + 0S_1 + S_2 &= 30 \\ X_1, X_2, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ملاحظة : المتغيرات الوهمية S_1 و S_2 تضاف الى دالة الهدف وتأخذ قيمة 0

أول خطوة تتمثل في إيجاد أول حلّ أساس مقبول، وهو موجود في جدول الحلّ الأولي. يتم الحصول على أول حلّ أساس مقبول عن طريق عدم متغيرات القرار أي: $X_1 = 0$ و $X_2 = 0$ ، بعد التعويض

في قيود النموذج نحصل على قيم كلّ من S_1 و S_2 حيث أنّ $S_1 = 40$ و $S_2 = 30$

و $Z = 0$ وهذا يعني أنّ المؤسسة لازالت في بداية نشاطها ولم تقم بعملية الإنتاج.

اذن أول حلّ أساس مقبول أو الحلّ الابتدائي هو :

$$X_1 = 0 , X_2 = 0 , S_1 = 40 , S_2 = 30 , Z = 0$$

الجدول الأول :

المتغير الداخلي (X_1)   المتغير الخارجي (S_1)

	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution	ratio
S_1	2	4	1	0	40	$40/2 = 20$
S_2	1	3	0	1	30	$30/1 = 30$
Z	-9	-7	0	0	0	

البؤرة هي نقطة تقاطع عمود المتغير الداخلي مع سطر المتغير الخارجي = 2

يتمّ تكوين الجدول الجديد بوضع المعادلة المحورية أي X_1 (الموجودة في الجدول الثاني) و يتمّ العمل عليها بإنشاء صفوف جديدة في الجدول الثاني، ننظر لكلّ عنصر من عناصر التبدّل الموجودة في عمود الارتكاز (أي عمود X_1 الموجود في الجدول الأول) ونستخدم القانون الآتي :

سالب عنصر التبدّل * المعادلة المحورية + المعادلة القديمة (الأصلية في الجدول السابق) = معادلة جديدة (في الجدول الجديد)

الجدول الثاني :

صفّ X_1 يمثل المعادلة المحورية

	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
X_1	1	2	1/2	0	20
S_2	0	1	-1/2	1	10
Z	0	11	9/2	0	180

بما أنّ كلّ الأرقام موجبة و معدومة في صفّ دالة الهدف (صفّ Z) يعني توصلنا الى الحلّ الأمثل.

الحلّ الأمثل : $X_1 = 20$, $X_2 = 0$, $S_1 = 0$, $S_2 = 10$, $Z = 180$

القرار الإداري : إنتاج 20 وحدة من X_1 وعدم إنتاج أيّ وحدة من X_2

من أجل تحقيق أعلى ربح ممكن مقداره $Z = 180$

يمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض في دالة الهدف.

كيفية الانتقال من الجدول الأول الى الجدول الثاني :

	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution	Ratio
S_1	2	4	1	0	40	$40/2 = 20$
S_2	1	3	0	1	30	$30/1 = 30$
Z	-9	-7	0	0	0	
X_1	1	2	1/2	0	20	نحصل على المعادلة المحورية بقسمة سطر المتغير الخارجي على البؤرة S_1
$-1(X_1)$	-1	-2	-1/2	0	-20	شرح كيفية
OLD S_2	1	3	0	1	30	الحصول على
NEW S_2	0	1	-1/2	1	10	قيم S_2 و Z
$9(X_1)$	9	18	9/2	0	180	في الجدول
OLD Z	-9	-7	0	0	0	الثاني
NEW Z	0	11	9/2	0	180	
X_1	1	2	1/2	0	20	جدول الحل
S_2	0	1	-1/2	1	10	الثاني
Z	0	11	9/2	0	180	