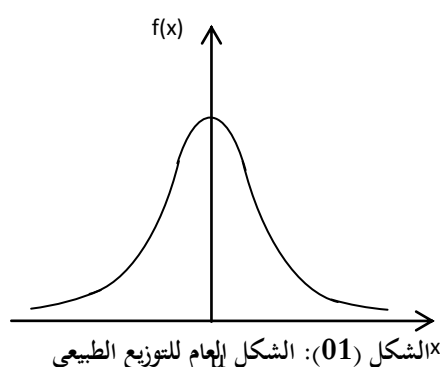


المحاضرة رقم 01: التوزيعات الاحتمالية المستمرة الأكثر شيوعاً

1 التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس -Gausse D. Normale ou D. de Laplace

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية. فلو اخترنا بالصدفة مئة أو ألفاً من المارين في شارع ما وقسنا أطولهم لوجدنا نسبة كبيرة منها قريبة من متوسط ما، ونسبة قليلة من طوال القامة ونسبة مقاربة لها من قصار القامة، ومثل هذا بالنسبة للأوزان. ولو مثلنا هذه البيانات في معلم متعامد متجانس لكان المنحنى الذي يمثل النسبة، أو ما يمكن أن نسميه الاحتمال، ذا شكل جرس متماثل حول المتوسط وهي صفات التوزيع الطبيعي (الشكل 01) :



صيغة القانون

تكتب دالة الكثافة لمنحنى للتوزيع الطبيعي كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

حيث μ و σ هما على التوالي التوقع والانحراف المعياري.

ونكتب $X \sim N(\mu, \sigma)$

دالة التوزيع (الدالة التجميعية) للتوزيع الطبيعي تكتب كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

المتغيرة المركزية أو المعيارية : تستخدم المتغيرة المعيارية $Z = (X-\mu)/\sigma$ لتكوين الجداول الإحصائية للاحتمالات:

$$F(z) = P(Z \leq z) \text{ أو } P(0 \leq Z \leq z)$$

حيث تسمح بكتابة الدالة f و F بدلالة مجهول واحد Z بدلا من 3 مجاهيل x و μ و σ وذلك كما يلي:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad -\infty < z < \infty$$

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

بالنظر إلى العلاقة الخطية بين المتغيرتين X و Z ، فإن Z تتبع نفس توزيع X أي التوزيع الطبيعي. ونعلم أن:

$$V(Z) = 1 \quad E(Z) = 0$$

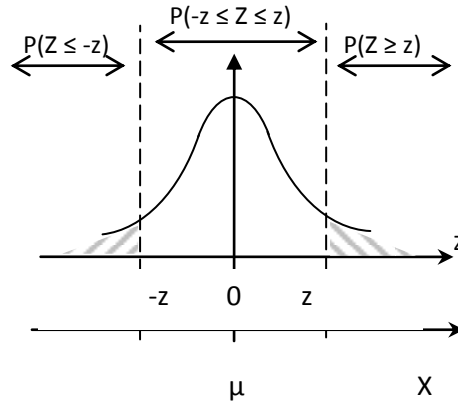
من خصائص التوزيع الطبيعي أنه يعتبر:

معتدلا لا مديبا ولا مفلطحا، حيث يعتبر معامل التفلطح $\alpha_4 = 3$ للتوزيع الطبيعي معيارا لاعتدال المنحنيات

تماثل منحنى X حول المتوسط (أنظر الشكل 3) يعني تماثل لمنحنى Z حول 0، مما يعني أنه من أجل أي قيمة للمتغيرة المعيارية $z > 0$:

$$P(0 \leq Z \leq z) = P(-z \leq Z \leq 0) = P(-z \leq Z \leq z) / 2$$

$$P(Z \leq -z) = 1 - P(Z \leq z) = P(Z \geq z)$$



رسم (02): استخدام تماثل الوزيع الطبيعي في حساب الاحتمالات

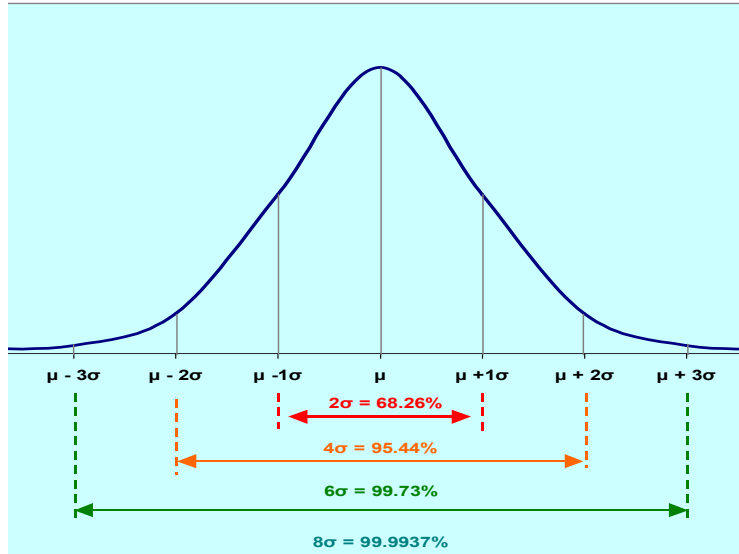
و لقد تم باستخدام المتغيرة المعيارية Z حساب الاحتمالات (المساحات) تحت المنحنى ومنها خاصة:

$$P(-\sigma \leq X \leq \sigma) = P(-\sigma \leq Z \leq \sigma) = 0.6837,$$

$$P(-2\sigma \leq X \leq 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 0.9544,$$

$$P(-3\sigma \leq X \leq 3\sigma) = P(-3 \leq Z \leq 3) = 0.9973.$$

هذه القيم وغيرها متوفرة في الجداول الإحصائية الخاصة بالتوزيع الطبيعي.



رسم (03) : المساحات الأساسية تحت منحنى التوزيع الطبيعي

مثال: باستعمال الجداول الاحصائية 1) أحسب : $P(0 \leq Z \leq z)$ حيث $z = 1, 2, 3$

2) أحسب $P(-z \leq Z \leq z)$ من أجل نفس القيم ل z .

1) 0.49865 ، 0.47725 ، 0.3413

2) 0.9973 ، 0.9545 ، 0.6827