المركز الجامعي احمد زبانة غليزان

معهد العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

محاضرات في مقياس الهندسة المالية
مدعمة بتمارين محلولة

الأستاذ المشرف على المقياس : بن عدة امحمد

موجهة إلى طلبة:

- **السنة الأولى ماستر تخصص مالية المؤسسة**
- **السنة الأولى ماستر تخصص اقتصاد نقدي وبنكي**

البرنامج:

- **تمارين محلولة خاصة بالمشتقات المالية، العقود الآجلة والعقود المستقبلية وآليات تسعيرها**
- **محاضرات خاصة بنماذج تسعير الخيارات المالية**
- **تمارين محلولة خاصة بنماذج تسعير الخيارات المالية في الزمن المتقطع: نموذج ثنائي الحد للفترة الواحدة، نموذج ثنائي الحد للفترتين، نموذج ثنائي الحد متعدد الفترات CRR**
- **محاضرة خاصة بتسعير الخيارات المالية في الزمن المستمر باستخدام نموذج بلاك سكولز**
- **تمارين محلولة خاصة بنماذج تسعير الخيارات المالية في الزمن المستمر باستخدام نموذج بلاك سكولز**

مقياس: الهندسة المالية (سلسلة الأعمال الموجهة 3 و 4 و5)

7. أسئلة نظرية وتمارين تطبيقية محلولة

7.1 أسئلة ذات اختيار متعدد:

اختر إجابة واحدة صحيحة من بين الخيارات المتاحة.

1. تتضمن المشتقات المالية ما يلي :
   a) الأسهم.
   b) السندات.
   c) العقود الآجلة.
   d) لا شيء مما سبق.

الإجابةc :

2. لا تتضمن المشتقات المالية ما يلي :
   a) العقود المستقبلية.
   b) السندات القابلة للتحويل إلى أسهم.
   c) العقود الآجلة.
   d) (a) و(c).
   e) كل ماسبق.
   f) ليس كل ماسبق.

الإجابةb :

3. أي مما يلي ليس بمشتقات مالية؟
   a) خيارات.
   b) العقود الآجلة.
   c) الأسهم العادية.
   d) العقود المستقبلية.
   e) ليس كل ما سبق.

الإجابةc :

يسمى العقد الذي يمنح المستثمر حق شراء الأوراق المالية في تاريخ لاحق مستقبلي بـــ:

a) التحوط.
b) عقد ذو مركز طويل.
c) عقد ذو مركز قصير.
d) (A) و(B).

الإجابة: b

يسمى العقد الذي يمنح المستثمر حق بيع الأوراق المالية في تاريخ لاحق بـــ:

a) عقد ذو مركز قصير.
b) عقد ذو مركز طويل.
c) التحوط.
d) التحوط الجزئي.

الإجابة a:

يتطلب عقد طويل من صاحبه :

a) بيع الأوراق المالية في المستقبل.
b) شراء الأوراق المالية في المستقبل.
c) التحوط في المستقبل.
d) إغلاق منصبه في المستقبل.

الإجابة: b

يتطلب عقد قصير منصاحبه :

a) بيع الأوراق المالية في المستقبل.
b) شراء الأوراق المالية في المستقبل.
c) التحوط في المستقبل.
d) إغلاق منصبه في المستقبل.

الإجابة a :

8. العقود الآجلة لا تعاني من مشكلة :

a) نقص السيولة.

b) عدم المرونة.

c) صعوبة العثور على الطرف المقابل.

d) المخاطر لاسيما مخطر الجهة المقابلة.

الإجابة: b

9. تعاني العقود المستقبلية من مشكلة :

a) نقص السيولة.

b) عدم المرونة.

c) صعوبة العثور على الطرف المقابل.

d) مخاطر الاقتراض(الجهة المقابلة).

الإجابة: b

10. طبيعة العلاقة بين قيمة العقود الآجلة وسعر الممارسة أو التنفيذ للوضع القصير هي :

a) طردية؛

b) عكسية؛

c) محايدة؛

d) ليس كل ما سبق.

الإجابةa :

11. تكون هناك فرصة للمراجحة بالعقود الآجلة إذا كان :

a) سعر الممارسة أكبر من السعر السوقي المتوقع؛

b) السعر السوقي أكبر من سعر الممارسة؛

c) السعر السوقي مساو للسعر المتوقع؛

d) كل من a و b .

الإجابةd:

12. وجود توزيعات على أسهم محل التعاقد في عقد آجل من شأنه أن :

a) يقلل من قيمة العقد؛

b) يزيد من قيمة العقد؛

c) يزيد من سعر السوقي المتوقع؛

d) ليس كل ماسبق.

e) كل ماسبق.

الإجابة: كل من a و c.

13. إذا قمت ببيع عقد قصير على العقود الآجلة، فقد تأمل في أسعار الفائدة أن تكون في حالة:

a) انخفاض أو سقوط.

b) مستقرة.

c) تقلب.

الإجابةa :

14. إذا قمت بشراء عقد طويل على العقود الآجلة، فقد تأمل في أسعار الفائدة أن تكون في حالة:

a) سقوط.

b) مستقرة.

c) تقلب.

الإجابة: b

15. إذا كنت قد بعت عقودا آجلة قصيرة سوف تأمل في أن أسعار السندات تكون في حالة :

a) سقوط.

b) مستقرة.

c) تتقلب.

الإجابة: b

16. يشار إلى فرص الربح بدون مخاطر في سوق العقود الآجلة بـــ:

a) المضاربة.

b) التحوط.

c) المراجحة.

d) الاهتمام المفتوح.

e) علامة إلى السوق.

الإجابة : c

17. العقود المستقبلية في الولايات المتحدة الأمريكية يتم تداولها بانتظام في:

a) مجلس شيكاغو للتجارة.

b) بورصة نيويورك.

c) سوق الأوراق المالية الأمريكية.

d) مجلس شيكاغو لتبادل الخيارات.

الإجابة : a

18. يتم تداول المستقبلية المالية بشكل منتظم في جميع ما يلي باستثناء :

a) مجلس شيكاغو للتجارة.

b) شيكاغو ميركانتيل.

c) بورصة نيويورك لتبادل العقود المستقبلية.

d) مجلس شيكاغو للسلع الأساسية.

الإجابة : D

19. الغرض من لجنة تداول العقود الآجلة للسلع هو القيام بكل ما يلي ما عدا

a) الإشراف على تداول العقود الآجلة.

b) ترى أن الأسعار لا يتم التلاعب بها.

c) الموافقة على العقود الآجلة المقترحة.

d) تحديد الحد الأدنى لأسعار العقود الآجلة.

الإجابةD :

20. نمت أسواق العقود الآجلة بسرعة في السنوات الأخيرة بسبب :

a) زيادة تقلبات أسعار الفائدة.

b) المديرين الماليين هم أكثر نفورا من المخاطرة.

c) على حد سواء(A) و.(B)

d) لا a ولا b

الإجابة : c

21. تتمثل ميزة العقود الآجلة على العقود المستقبلية في أنها :

a) موحدة.

b) لديها مخاطر اقتراض أقل.

c) أكثر سيولة.

d) لا شيء مما سبق.

الإجابةD :

22. تتمثل ميزة العقود الآجلة على العقود المستقبلية في أنها:

a) موحدة.

b) لديها مخاطر اقتراض أقل.

c) أكثر مرونة.

d) (A) و.(B)

الإجابة : c

23. نمت أسواق العقود المستقبلية بسرعة عن العقود الآجلة بسبب :

a) موحدة.

b) لديها مخاطر اقتراض أقل.

c) سائلة.

d) كل ما ورد أعلاه.

الإجابةD :

24. العقود المستقبلية تختلف عن العقود الأجلة لأنها :

a) تستخدم لتحوط المحافظ.

b) تستخدم للتحوط من الأوراق المالية الفردية.

c) مستخدمة في كل من الأسواق المالية وأسواق الصرف الأجنبي.

d) عقود نمطية موحدة.

الإجابةD :

25. العقود المستقبلية تختلف عن العقود الأجلة لأنها :

a) تستخدم لتحوط المحافظ.

b) تستخدم للتحوط من الأوراق المالية الفردية.

c) مستخدمة في كل من الأسواق المالية وأسواق الصرف الأجنبي.

d) يتم تسوية العقود يوميا.

الإجابةD :

26. أي من السمات التالية للعقود المستقبلية التي تساهم في زيادة السيولة؟

a) توحيد العقود في انماط محددة.

b) رفع سعر الممارسة.

c) لا ترتبط بنوع معين من السندات.

d) تتبع السوق يوميا.

الإجابةD :

27. أي من العناصر التالية الذي يؤثر سلبا على قيمة العقد الطويل :

a) العقود الموحدة.

b) معدل الفائدة.

c) السعر السوقي للأصل محل التعاقد.

d) كل من a و b.

الإجابةb :

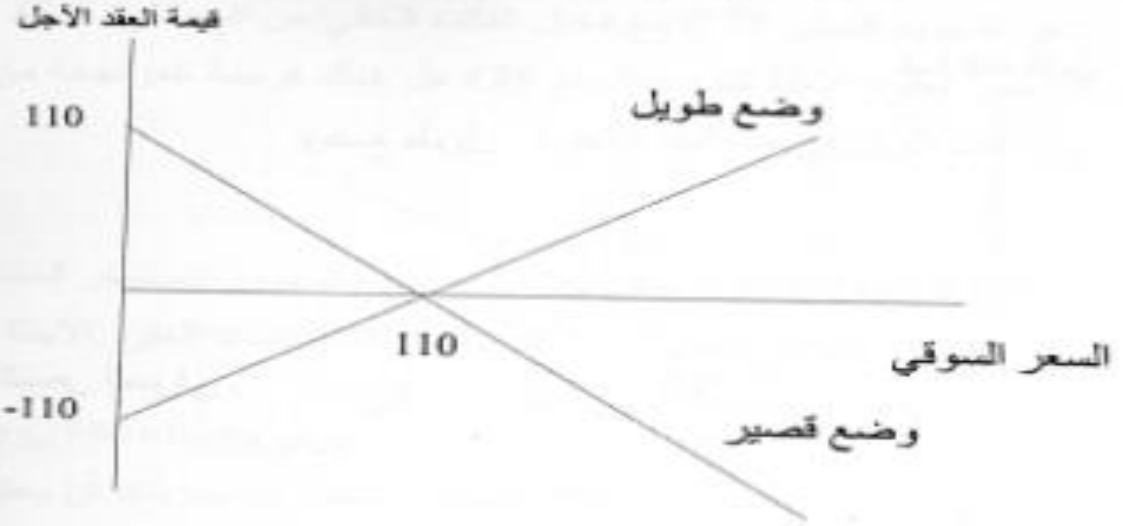
7.2 تمارين تطبيقية محلولة

تمرين1-1:

يـــرغب مـــستثمر فيـــشراء عقد اجل على الأسهم مع سعر فوري 90 € وتاريخ التسليم 6 أشهر من الآن. السعر الآجل هو 110 €. ارسم التمثيل البياني للعائد لكل من الموقف الطويل والقصير للعقد الآجل.

الحل: نعرض الشكل التالي الذي يبرز ذلك:

الشكل (1-6) : التمثيل البياني للتمرين (1-1)



تمرين 1-2:

فـــيما يـــتعلق بمخاطـــر الائـــتمان، هل العقد الآجل ذو مخاطر أكبر من العقود المستقبلية؟ اشرح ذلك.

الحل:

يتم تداول العقود الآجلة خارج البورصة بين طرفين والعقود المستقبلية يتم تداولها فـــي البورصـــات حـــيث يتطلب دفع الهامش المبدئي، وبالتالي العقود الآجلة هي أكثر مخاطرة من العقود المستقبلية من حيث السيولة ومخطر الجهة المقابلة.

تمرين1-3:

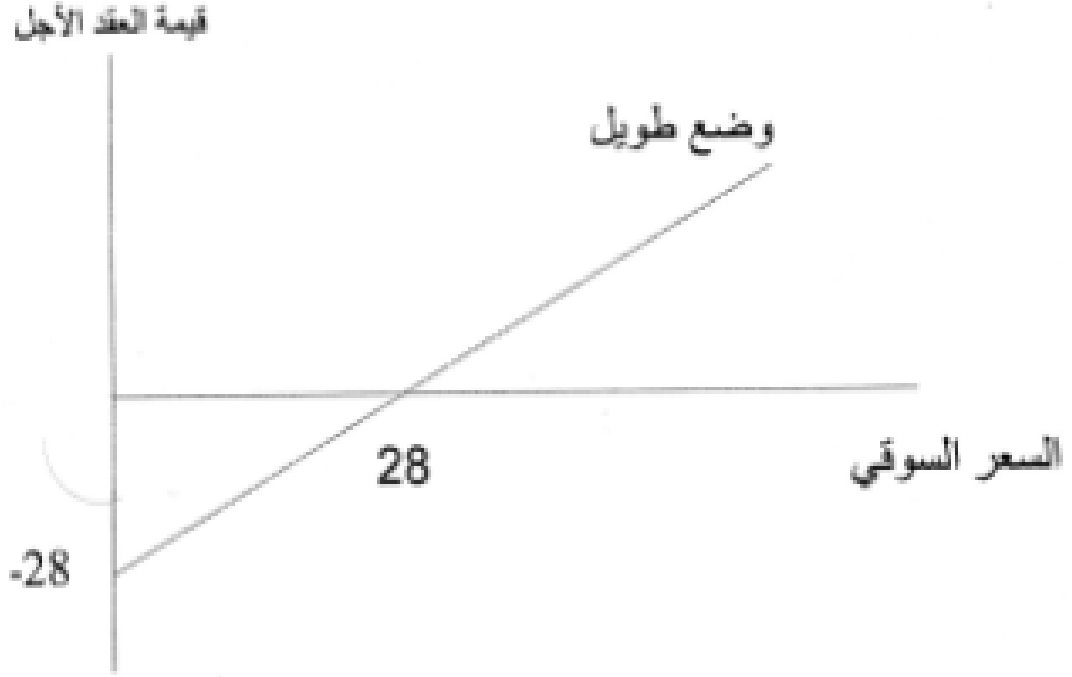
لنفتـــرض أن أســـهم شركة GIBA تتداول بسعر 25 € ولا تدفع أي أرباح وأن سعر الفائدة هو 5٪ سنويا. السعر الآجل للتسليم في غضون سنة واحدة هو 28€.

- ارسم مخططات الربح payoff لموقف طويل لهذا العقد.

الحل:

نظـــرا لعـــدم وجـــود تكلفة تنطوي على الدخول في عقد آجل، فمخططات الربح payoff لموقف طويل لهذا العقد هي كما يلي :

الشكل (1-7): التمثيل البياني للتمرين (1-3)



تمرين1-4:

لـيكن لدينـا سـهما، حاليا سعره السوقي 100 € للسهم الواحد مع معدل الفائدة الخالـية من المخاطر هو 2٪ سنويا. يبلغ سعر العقود الآجلة على هذا السهم لعقد مدته سنة واحدة 104 € ات .هل هناك فرصة للمراجحة عن طريق الدخول في موقف قصير في هذا العقد الآجل؟

الحل

فـي الـوقت الحالي$t = 0$ ، يمكن للمضارب اقتراض 100 € من البنك، وشراء الأسـهم وشـراء العقـود الآجلـة ذات المركز القصير. في وقت التسليم$T = 1$ سنة، والقرض هو الآن يستحق دفع:

$$100e^{0.02 \times 1} = 102.02 €$$

مـن خلال تسليم الأسهم إلى حامل العقد الطويل وتلقي 104 €، يمكن للمضارب تحقيق ربح غير بدون مخاطرة من 104 € - 102.02 € = 1.98 €. هذا الربح ناجم عن عملية المراجحة.

تمرين1-5:

سعر السهم الحالي 75 € مع معدل الفائدة الخالي من المخاطرة 2.5٪ سنويا. نفترض أن سعر العقود الأجلة لمدة سنة يبلغ 74€ هل هناك فرصة للمراجحة من خلال الدخول في موقف طويل في هذا العقد الأجل؟

الحل:

في الوقت الحالي $t = 0$، يمكن للمضارب بيع الأسهم، والاستثمار العائدات في حساب مصرفي بمعدل خالي من المخاطر ثم عقد العقود الأجلة طويلا. في الوقت $T = 1$ سنة، فإن مبلغ المال في البنك ينمو إلى:

$$75e^{0.025 \times 1} = 76.89\ €$$

بعد دفع ثمن العقود الأجلة بسعر 74 €، يمكن للمضارب بعد ذلك أن يحقق ربحا غير محتمل من 76.89€-74€ = 2.89 €.

تمرين1-6 :

هل سعر العقود الأجلة لمؤشر الأسهم أكبر من أو أقل من القيمة المستقبلية المتوقعة للمؤشر؟ اشرح اجابتك.

الحل:

إن السعر الآجل لمؤشر الأسهم هو دائما أقل من القيمة المستقبلية المتوقعة للمؤشر. ويأتي ذلك من حقيقة أن المؤشر ينطوي على مخاطر نظامية إيجابية اللحصول على حجة بديلة، ونفرض أن μ هو العائد المتوقع المطلوب من قبل المستثمرين على المؤشر؛ حيث أنه:

$$E(S_T) = S_0 e^{(\mu - q)T},\ \mu > r,\ F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$
$$E(S_T) > F_0$$

تمرين 1-7:

بلغ معدل الفائدة الخالية من المخاطر 7٪ سنويا مع الرسملة المستمرة، والتوزيعات على مؤشر الأسهم 3.2٪ سنويا. القيمة الحالية للمؤشر هي 150. ما هو سعر العقود الآجلة لستة أشهر؟

الحل:

سعر العقود الآجلة لستة أشهر هو:

$$150e^{(0.07-0.032)\times 0.5} = 152.88$$

تمرين 1-8:

نفترض أن معدل الفائدة الخالي من المخاطر هو 9٪ سنويا مع الرسملة المستمرة وأن عائد توزيعات الأسهم يختلف على مدار السنة، ففي شباط / فبراير وأيار / مايو وآب / أغسطس وتشرين الثاني / نوفمبر، تدفع أرباح الأسهم بمعدل 5 ٪سنويا؛ أما في الأشهر الأخرى، تدفع أرباح الأسهم بمعدل 2٪ سنويا .لنفترض أن قيمة المؤشر في 31 يوليو هي 1300. ماهو السعر الآجل لعقد يسلّم في 31 ديسمبر من نفس العام؟

الحل :

معدل توزيعات الأرباح هو 2٪ مدة ثلاثة أشهر و5٪ لمدة شهرين .وبالتالي فإن متوسط عائد التوزيعات هو:

$$\frac{1}{5}(3\times 2+2\times 5) = 3.2\%$$

السعر الآجل لعقد يسلّم في 31 ديسمبر من نفس العام (حيث المدة 5 اشهر) هو :

$$1300e^{(0.09-0.032)\times 0.4167} = 1331,80$$

تمرين1-9 :

افترض أن معدل الفائدة الخالي من المخاطر هو 10٪ سنويا مع ر سملة مستمرة وأن معدل توزيعات الأسهم هو 4٪ سنويا .ويبلغ المؤشر400، والعقود الآجلة يتم تسليمها في أربعة أشهر بقيمة 405. ما هي استراتيجية المراجحة الممكنة؟

الحل :

السعر النظري للعقد هو :

$$400e^{(0.10-0.04)\times 4/12} = 408.08$$

سعر العقود الآجلة الفعلي هو 405 فقط. وهذا يدل على أن سعر العقود الآجلة للمؤشر منخفض جدا بالنسبة للمؤشر. استراتيجية المراجحة الصحيحة هي:

أ) شراء العقود الآجلة

ب) اتخاذ مركز قصير للأسهم التي يقوم عليها المؤشر؛

تمرين1-10:

تتراوح معدلات الفائدة في سويسرا والولايات المتحدة لمدة شهرين بين 1 و2 في المائة سنويا على التوالي، مع رسملة مستمرة. السعر الفوري للفرنك السويسري هو 1.0600 €. سعر العقود الآجلة لعقد مدته شهرين هو 1.0500€. ما هي الفرص المراجحة التي يجنيها هذا العقد؟

السعر النظري هو :

$$1.0600e^{(0.02-0.01)\times 2/12} = 1.0618$$

سعر العقود الآجلة الفعلي منخفض جدا .ويشير ذلك إلى أن المراجحة ينبغي أن تبيع الفرنك السويسري وتشتري العقود الآجلة بالفرنك السويسري.

تمرين1-11:

السعر الحالي للفضة هو 30 € للأونصة. تكاليف التخزين هي 0.48 € للأونصة سنويا تدفع كل ثلاثة أشهر مقدما. على افتراض أن أسعار الفائدة هي 10٪ سنويا لجميع آجال الاستحقاق، احسب سعر العقود الآجلة للفضة للتسليم في تسعة أشهر موالية.

القيمة الحالية لتكاليف التخزين لمدة تسعة أشهر مواليةهي :

تكاليف التخزين الشهرية هي 0,4 شهريا، وبالتالي نقوم بعملية التحيين لثلاثة أشهر ولستة أشهر، ونكتب :

$$0.12+0.12e^{(-0.10\times 0.25)}+0.12e^{(-0.10\times 0.5)} = 0.351$$

سعر العقود الآجلة للفضة للتسليم في تسعة أشهر هو :

$$F_0 = (30+0.351)e^{0.1\times 0.75} = 32.72$$

أي 32.72€ للأونصة.

تقييم الخيارات في الزمن المتقطع ونموذج ثنائي الحد

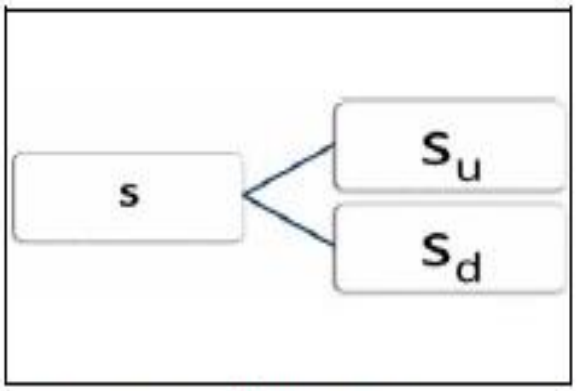
The binomial options pricing model BOPM

يعتبر النموذج المنفصل أو النموذج ذو الحدين النموذج الأكثر أهمية في تسعير الخيارات المالية من ناحية أنه يعطي مفاهيم أفضل للسيرورات الخيارية، وذلك راجع لكونه يقوم على رسم بياني أو شجرة قرار تسمح بتمثيل المسارات المختلفة لسعر الأصل الضمني خلال مدة صلاحية الخيار[1].

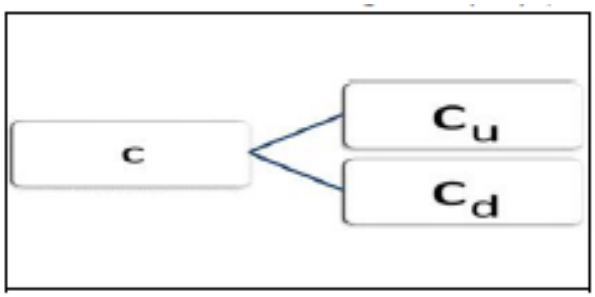
ورغم عديد النماذج والمحاولة في كل مرة وضع النموذج الأشمل لتسعير الخيارات، يبقى النموذج الذي تم اقتراحه من طرف كوكس، روس وروبنشتاين (1979) الأكثر استخداما في تسعير الخيارات، فعلى عكس نموذج بلاك وسكولز الذي سنعرض له لاحقا، والذي يعنى أساسا بتسعير عقود الخيارات الأوروبية فإن النموذج الثنائي يصلح لتسعير كل من الخيارات الأوروبية والأمريكية، هذا فضلا عن إمكانية استخدامه في تسعير العقود الأكثر تعقيدا التي تتداول في الأسواق الغير منظمة والتي يتم تفصيلها حسب احتياجات طرفيها.

1. نموذج ثنائي الحد للفترة الواحدة

يرتكز النموذج ثنائي الحد على الحالة التي يكون فيها سعر السهم قابل للارتفاع بنسبة مئوية u أو الانخفاض بنسبة مئويةd، فإذا كان سعر الأصل الضمني الحالي S، فإن السعر في المرحلة التي تليه سوف يكون ($S_u=S(1+u$ في حالة صعود الأسعار أو $S_d=S(1+d)$ في حالة نزولها. ويتم تمثيل الحالة السابقة بالشكل التالي.



وإذا كنا نعلم أن خيارات الشراء يكون لها نفس سلوك أسعارها الضمنية في حالة تغير أسعارها، يكون لدينا:



يجب التنبيه على أنه في غياب أية إمكانية للتحكيم (AOA) يكون لدينا الشرط التالي:
$d < 1 + r < u$.

في هذا النوع من النماذج لدينا طريقتين لحساب قيمة الخيار في الزمن t_0: الطريقة الأولى وتدعى بطريقة محفظة التحوط أو التغطية والطريقة الثانية تسمى بطريقة احتمال المخطر المحايد .

1 . <u>طريقة محفظة التحوط أو التغطية</u> : يتطلب ذلك بناء محفظة من الأصول التي تغطي بطريقة دقيقة التدفقات النقدية تحت فرضية غياب فرصة المراجحة ، وتتكون المحفظة من أصول ذات مخاطرة وأصول أخرى بدون مخاطرة بالشكل الذي تتساوى فيه عوائد هذه المحفظة مع معدل العائد بدون مخاطرة ، بمعنى ان قيمة المحفظة في نهاية فترة الاستحقاق تتناسب مع عائد الخيار.

نموذج ثنائي الحد يتحقق بدون فرصة المراجحة اذا كان: $d < e^r < u$

لتكن V_0 قيمة المحفظة في بداية الفترة $t = 0$ مكونة من العدد (Δ) من الاصول ذات مخاطرة ذات القيمة (S) وكمية (Y) من اصل بدون مخاطرة وبمعدل عائد (r) حيث تكتب قيمة المحفظة كما يلي: $V_0 = \Delta S + Y$

نحتاج في كل مرحلة لتحديد قيمة Y و Δ لإيجاد قيمة كل من C، C_u ، C_d بواسطة شجرة ثنائي الحد.

في الفترة $t = 1$ قيمة محفظة التحوط تكون مطابقة للمحفظة ذات القيمة الابتدائية V_0 ولتكن V_1 حيث أن: $V_1 = \Delta S_1 + e^r Y$ **. بما أن S_1 تأخذ قيمتين فان للمحفظة كذلك قيمتين ونكتب:**

$$V_1 = \begin{cases} \Delta S_u + e^r Y \\ \Delta S_d + e^r Y \end{cases}$$

في هذه المرحلة نقوم باختيار قيمة Y و Δ التي تجعل قيمة الخيار عند الارتفاع مساوية لها عند الانخفاض بعد حل جملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} C_u = \Delta S_u + e^r Y \\ C_d = \Delta S_d + e^r Y \end{cases}$$

$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)}$ ، $Y = \frac{C_d u - C_u d}{e^r (u-d)}$

بإضافة العلاقتين إلى $V_0 = \Delta S + Y$ **نجد:**

$$C_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{r}}\left[C_u\left(\frac{e^r - d}{\boldsymbol{u-d}}\right) + C_d\left(\frac{u - e^r}{\boldsymbol{u-d}}\right)\right]$$

اذا تغير الأصل الخطر بوحدة واحدة فان سعر الخيار $\Delta S + Y$ يتغير بـ Δ وحدة.

1 . <u>طريقة محفظة التحوط أو التغطية</u> : لم يأخذ في الحسبان أسلوب محفظة التحوط الاحتمالات المرتبطة بارتفاع وانخفاض سعر الأصل الذي به مخاطر

$$C_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{r}}\left[C_u\left(\frac{e^r - d}{\boldsymbol{u-d}}\right) + C_d\left(\frac{u - e^r}{\boldsymbol{u-d}}\right)\right]$$

فلو تم افتراض أن: $p = \left(\frac{e^r - d}{\boldsymbol{u-d}}\right)$ و $1 - p = \left(\frac{u - e^r}{\boldsymbol{u-d}}\right)$

وهما على التوالي احتمال ارتفاع سعر الأصل واحتمال انخفاض سعر الأصل وهي احتمالات المخطر المحايد.

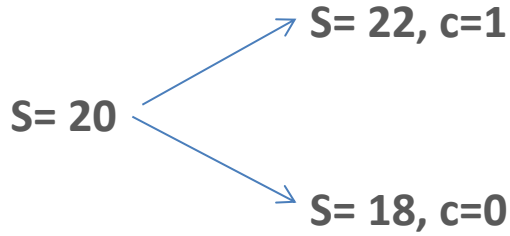
تصبح علاقة سعر خيار الشراء كما يلي:

$$C_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{r}}[C_u p + C_d(1-p)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{r}} E(C_1)$$

<u>مثال تطبيقي:</u> اذا كان السعر الحالي S لسهم 20 دولار، ويمكن أن يكون في نهاية 3 اشهر إما 22 دولار أو 18 دولار أي بتقلب 10%، تم إبرام عقد خيار شراء أوروبي على هذا السهم بسعر ممارسة K 21 دولار خلال 3 اشهر،

المطلوب هو حساب القيمة الحالية لخيار الشراء في ظل غياب فرصة المراجحة

<u>الحل:</u>



لنفرض ان المحفظة تتكون من عدد Δ من الأسهم ذات المركز الطويل وعقد خيار شراء واحد ذو مركز قصير.

اذا ارتفع السعر من 20 دولار إلى 22 دولار فان قيمة المحفة هي $22\Delta - 1$

أما حالة الانخفاض فهي 18Δ ، شرط تحقق محفظة التحوط ذات المخطر المحايد هي أن تكون المعادلة كما يلي: $22\Delta - 1 = 18\Delta$

ومنه $\Delta = 0{،}25$ سهما وخيار شراء واحد.

قيمة المحفظة في حالة الارتفاع $22 \times 0{،}25 - 1 = 4{،}5$

قيمة المحفظة في حالة الارتفاع $18 \times 0{،}25 = 4{،}5$

2.تقييم الخيارات باستخدام نموذج ثنائي الحد للفترتين

افترضنا في النموذج السابق أن سعر السهم سوف يتحرك لمرة واحدة خلال فترة الدراسة، نحو الأعلى بنسبة (u) أو نحو الأسفل بنسبة (d)، وتعتبر الحالة السابقة تمثيل بسيط للنموذج ثنائي الحد، كون حركة أسعار الأسهم تتميز بالحركة المستمرة خلال فترة استحقاقه.

إن عدد النتائج الممكن حدوثها سوف تزداد وهذا يعني أن مخرجات المدة الأولى سوف تكون مدخلات المدة الثانية أي في تاريخ استحقاق الخيار إذا ارتفع سعر السهم في المدة إلى (S_u)، ثم ارتفع ثانية في الفترة الثانية تصبح قيمة السهم[2]:

$$S_u^2 = S(1+u)^2$$

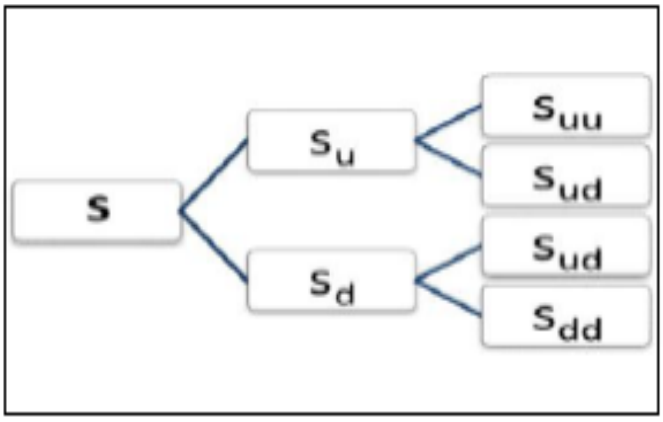
أو ستنخفض بعد ارتفاعه الأول في الفترة الأولى فسوف يعبر عن هذه الحالة كما يأتي:

$$S_{ud} = S(1+u)(1+d)$$

أما لو كان سعر السهم في نهاية الفترة الأولى قد انخفض فإنه خلال الفترة الثانية أما ينخفض أو يرتفع حسب المعادلتين التاليتين بالترتيب:

$$\begin{cases} S_d^2 = S(1+d)^2 \\ S_{du} = S(1+d)(1+u) \end{cases}$$

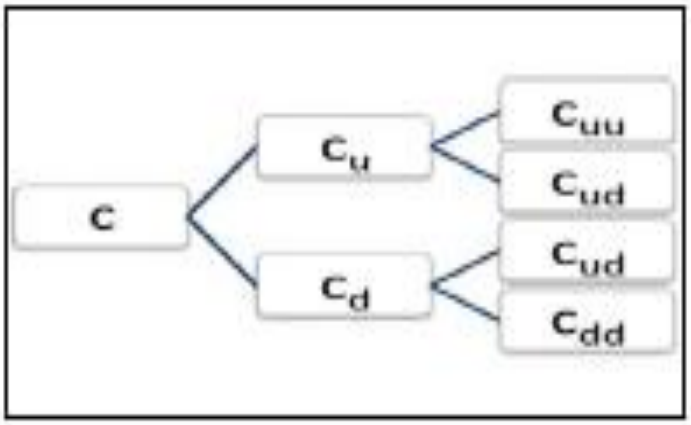
شكل رقم (12): نموذج الفترتين لسعر السهم الضمني



أما قيم الخيار المختلفة المقابلة لمختلف تحركات سعر السهم الضمني فإنها تكون كما يلي[1]:

$$\begin{cases} C_u^2 = \max\left[S(1+u)^2 - E, 0\right] \\ C_{ud} = \max\left[S(1+u)(1+d) - E, 0\right] \\ C_d^2 = \max\left[S(1+d)^2 - E, 0\right] \end{cases}$$

شكل رقم (13): نموذج الفترتين لسعر خيار الشراء



إن أسعار الخيار الممكن حدوثها في نهاية الفترة الأولى هي ارتفاع سعر الخيار إلى C_u أو أن ينخفض إلى C_d وفي كلتا الحالتين هنالك نتيجتان محتملتان في الفترة الثانية، وبذلك يمكن استعمال النموذج الثنائي للفترة الواحدة لتسعير الخيار في حالة الارتفاع وفي حالة الانخفاض كما يلي[2]:

$$C_u = \left[PC_c^2 + (1-P)C_{ud}\right]/(1-r)$$

$$C_d = \left[PC_{ud} + (1-P)C_d^2\right]/(1+r)$$

وعليه فإن سعر الخيار هو دالة للمتغيرات (C_u, C_d, P, r) وأن قيمة (P) تحسب بالمعادلة الآتية:

$$(P) = (r-D)/(U-D)$$

وتتحدد القيمة النظرية العادلة للخيار وفقا للمعادلة الآتية:

$$C^* = \left[P^*C_u + (1-P)C_d\right]/(1+r)$$

وبعد تعويض قيم كل من C_d وC_u في المعادلة السابقة نحصل على الصيغة الرياضية للقيمة النظرية العادلة لتسعير الخيارات للفترتين وكالاتي:

$$C^{**} = \left[P^2C_u^2 + 2P(1-P)C_{ud} + (1-P)^2C_d^2\right]/(1+r)^2$$

يمكـــن توسعة النموذج السابق لأجل خطوتين وهو ما يعرف بنموذج ثنائي الحد للفترتين.

3.1 تقييم خيار شراء أوربي باستخدام نموذج ثنائي الحد للفترتين

تعـــد شجرة ثنائي الحد لفترتين هي تكرار لشجرة ثنائي الحد للفترة الواحدة؛ أين يكـــون لكـــل خطوة واحدة سيناريوهين محتملين؛ حيث السعر في الفترة الأولى S1تأخذ قيمتـــين S_u و S_d في الفترة t=1 وفي نهاية مدة حياة الخيار يأخذ سعر خيار الشراء الأوربي القيم في النقاط النهائية للشجرة يكتب على النحو التالي :

$$Cuu = \max[Su^2 - K;0]$$

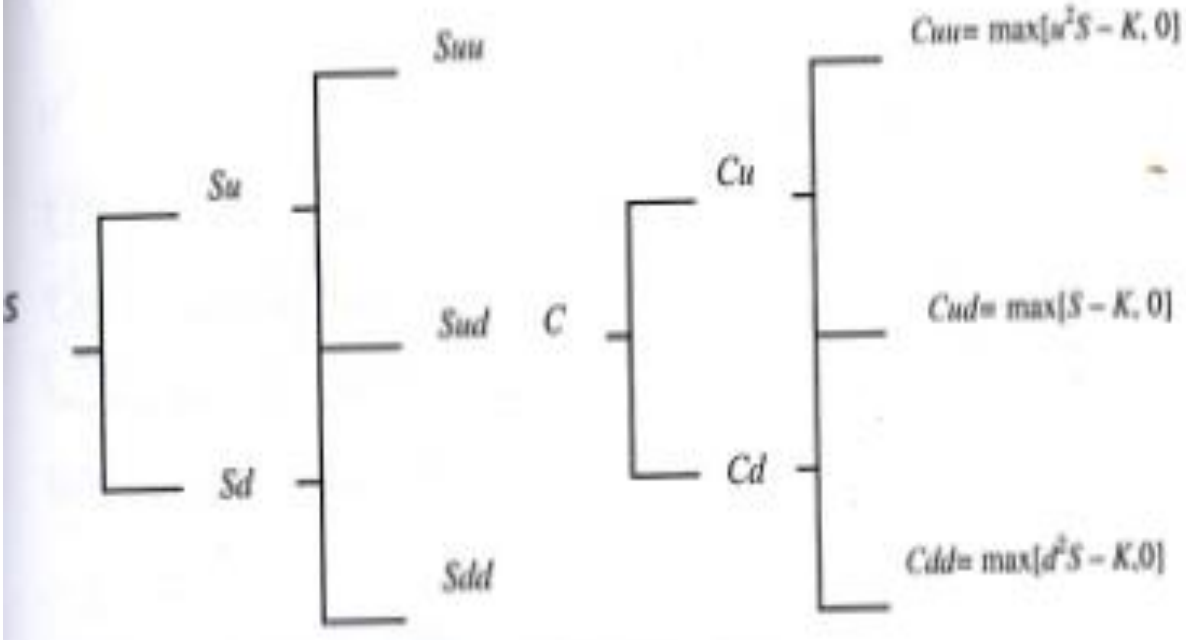
$$Cud = max[Sud - K;0] = Max[S - K;0]$$

$$Cdu = max[Sdu - K;0]$$

$$Cdd = max[Sd^2 - K;0]$$

يمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالي:

الشكل (3-4) : شجرة ثنائي الحد لفترتين لأسعار الأصل محل التعاقد وخيار الشراء الأوربي



في حالة خيار الشراء الأوروبي، لا يمكن تنفيذ الصفقة عند t=1 بحكم خاصية هذا الأخير حتى يبلغ تاريخ الممارسة، ومنه قيمة الأصل محل التعاقد S1 عند كل عقدة تساوي قيمة الأمل الرياضي المحين للقيمةالنهائية.

$$Cu = e^{-r*T/n}\mathrm{E}[C2] = e^{-r}[\mathrm{Cuup} + Cud(1-p)]$$
$$Cd = e^{-r}[\mathrm{Cdup} + Cdd(1-p)]$$

حـيث T/n هي مدة الحياة مقسمة على عدد الخطوات (1/2 في هذه الحالة)،أما القيمة الابتدائية فتساوي قيمة الأمل الرياضي المحين لقيم الفترات الموالية t=1 و t=2 .

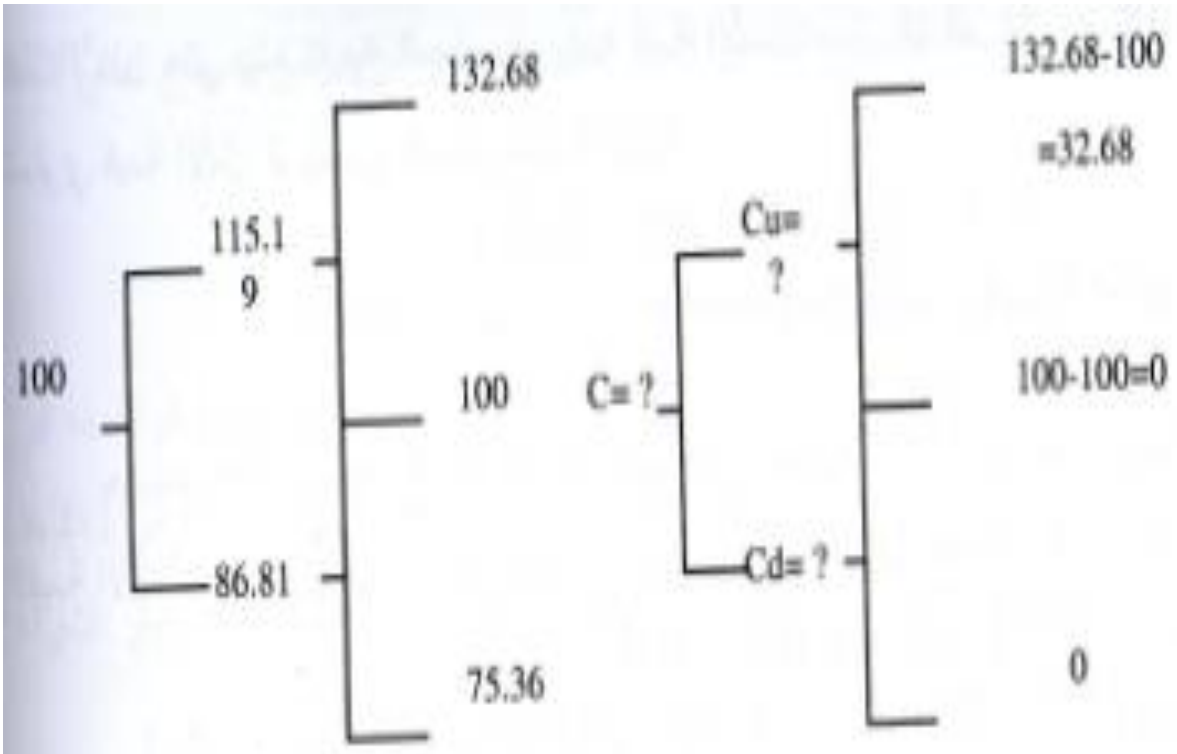
$$C = e^{-r*T/n}[Cup + Cd(1-p)]$$
$$C = e^{-2r*T/n}[Cuup^2 + 2p(1-p)Cud + (1-p)^2\ Cdd]$$

3.2 مثال تطبيقي حول تقييم خيار الشراء الأوربي باستخدام شجرة ثنائي الحد لفترتين

ليكن لديك عقد خيار شراء أوربي يمتاز بالخصائص التالية :

$$S=100, K=100, T=1, n=2, u=1,152 d=0,868, r=0.1$$

نعمـل على إنشاء شجرة للأسعار وفق النموذج ثنائي الحد؛ ففي الخطوة الأولى الـسعر سـوف يرتفع إلى الأعلى بقيمة ناتجة عن ضرب معامل الارتفاع u في السعر الأوليS، أو سوف ينخفض إلى الأسفل بقيمة ناتجة عن ضرب معامل الانخفاض d في الـسعر الأولـيS؛ في الخطوة الثانية كذلك السعر الجديد سوف يرتفع إلى الأعلى بقيمة ناتجـة عـن ضرب معامل الارتفاع u في السعر الجديد للخطوة الأولى Su (أو السعر الأولي في مربع معامل الارتفاع)، أو سوف ينخفض إلى الأسفل بقيمة ناتجة عن ضرب معامـل الانخفـاض d في السعر الجديد للخطوة الأولى Sd (أو السعر الأولي في مربع معامل الانخفاض)، ويمكن تلخيص ما سبق في شجرة أسعار السهم وأسعار الخيار في الشكل التالي:



لحساب قيمة الخيار لابد من القيام بعملية الرجوع إلى الأمام من نهاية الشجرة حيث عند العقدة الأولى نحصل على قيمة الخيار ؛ كما نعتمد على الاحتمال الذي يحسب كما يلي:

$$p = \frac{e^{rT/n} - d}{u - d} = 0.6454$$

ونكتب :

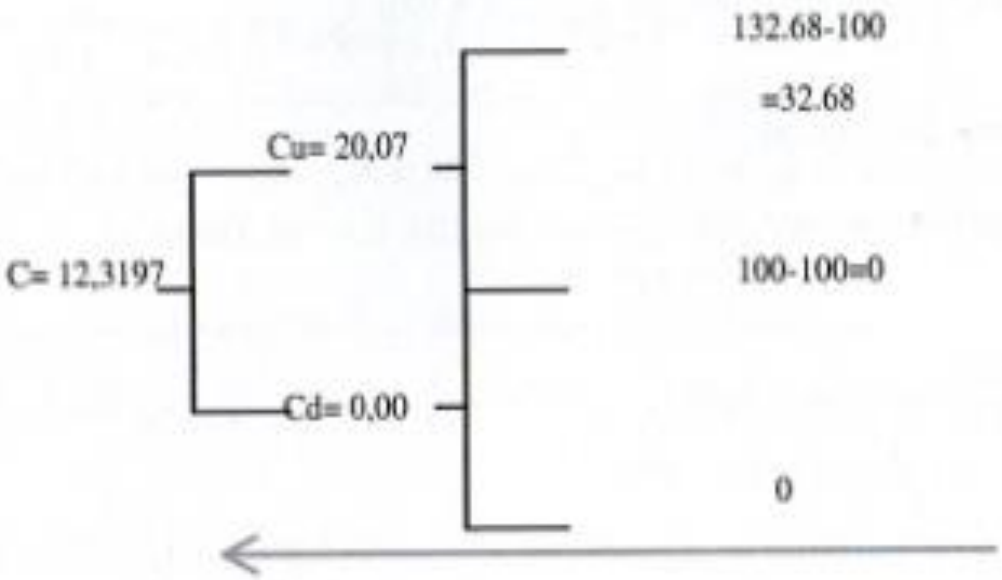
$$Cu = e^{-r*T/n}E[C2] = e^{-r}[Cuup + Cud(1-p)]$$

$$Cu = e^{-0.1*1/2}[32{,}69 * 0{,}6454 + 0 * (1 - 0.6454)] = 20.07$$

$$Cd = e^{-0.1*1/2}[0 * 0{,}6454 + 0(1 - 0{,}6454)] = 0$$

$$C = e^{-0.1*1/2}[20.7 * 0{,}6454 + 0(1 - 0{,}6454)] = \mathbf{12{,}3197}$$

إذا قيمة خيار الشراء الأمريكي في ظل نموذج ثنائي الحد ذو الخطوتين هي: **12,3197** دولارا ، ويمكن تلخيص ذلك في الشكل التالي:



يبدو أن شجرة خيار الشراء فارغة من الأسفل (بها أصفار) وهو دليل لعدم تنفيذ خيار الشراء الذي يهدف إلى التحوّط من مخطر الارتفاع، في حين كانت ممتلئة من الأعلى نتيجة تنفيذ عقد خيار الشراء.

3.4 تقييم خيار البيع الأوربي باستخدام شجرة ثنائي الحد للفترتين

تهـدف عمليـة شـراء خيار البيع بلغة التحوط إلى التحوّط من مخطر انخفاض السعر، وبالتالـي عند انخفاض السعر سيتم تنفيذ العقد وممارسته، وهذا يعني أن أسفل الشجرة يكون مملوء على عكس شجرة خيار الشراء التي كانت فارغة وبها أسفار في الأسفل.

شـجرة سـعر الأسعار للأصل محل التعاقد لا تختلف باختلاف الخيار بل تبقى نفسها، لكن شجرة الخيار تختلف، حيث يأخذ سعر خيار البيع الأوربي القيم في النقاط النهائية للشجرة يكتب على النحو التالي:

$$Puu = max[0; K - Suu]$$
$$Pdu = Pud = max[0; K - Sud]$$
$$Pdd = max[0; K - Sd^2]$$
$$Pu = e^{-r}[Puup + Pud(1-p)]$$
$$Pd = e^{-r}[Pdup + Pdd(1-p)]$$
$$P = e^{-r}[Pup + Pd(1-p)]$$

3.5 مثال تطبيقي حول تقييم خيار البيع الأوربي باستخدام شجرة ثنائي الحد لفترتين

باعتبار نفس البيانات الخاصة للمثال السابق، وأن العقد هو عقد خيار بيع :

$$S=100,\ K=100,\ T=1,\ n=2,\quad \sigma=0.2,\ r=0.1$$

معلمات النموذج كذلك نفسها ولا تختلف وهي كما يلي:

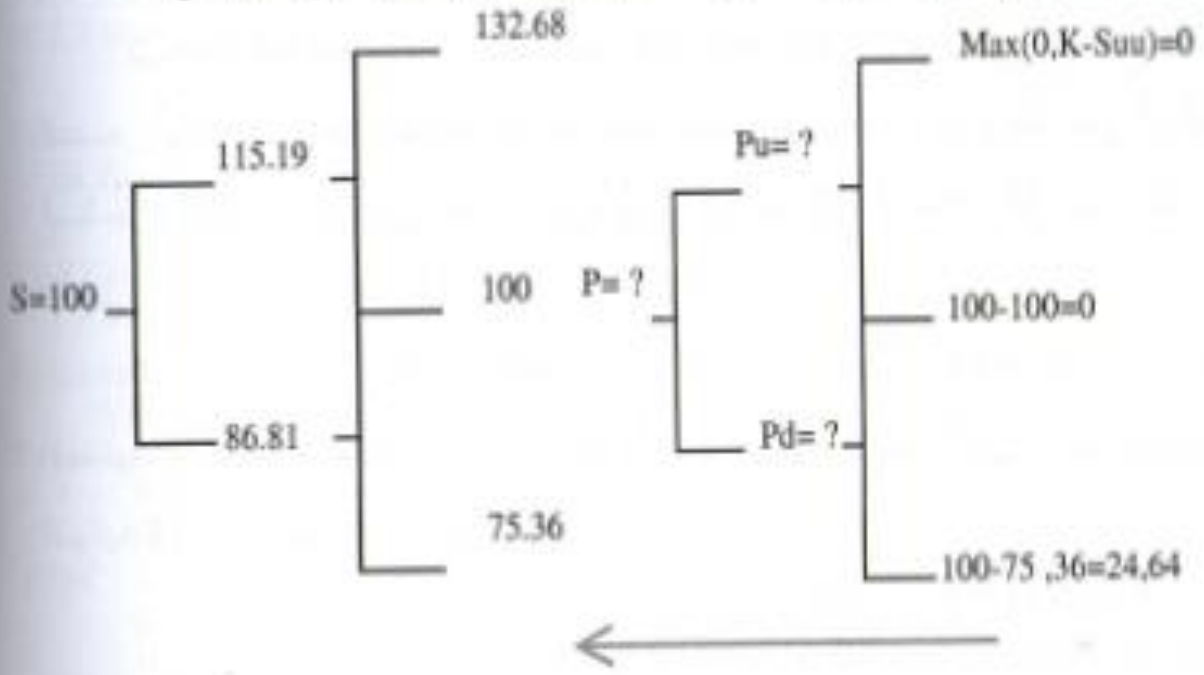
$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}} = e^{0.5\sqrt{1/2}} = 1.152$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}} = \frac{1}{u} = 0.868$$

$$p = \frac{e^{rT/n} - d}{u - d} = 0.6454$$

نعمل على إنشاء شجرة للأسعار وفق النموذج ثنائي الحد؛ لأسعار السهم وأسعار الخيار في الشكل التالي:

الشكل (3-8): شجرة ثنائي الحد لفترتين لتقييم خيار البيع الأوربي



لحساب قيمة الخيار لابد من القيام بعملية الرجوع إلى الأمام من نهاية الشجرة (أنظر السهم في الشكل الأيمن) حيث عند العقدة الأولى نحصل على قيمة الخيار .

في البداية نحسب القيمة الجوهرية في نهاية الشجرة عند كل عقدة :

$$Puu = max[0; K - Su^2] = Max[0; 100 - 132{,}69] = 0$$
$$Pdu = Pud = max[0; K - Sud] = Max[0; 100 - 100] = 0$$
$$Pdd = max[0; K - Sd^2] = Max[0; 100 - 75{,}36] = 24{,}64$$

في المرحلة الثانية نحسب قيمة الخيار عند كل عقدة في الخطوة الثانية، حيث قيمة الخيار في كل عقدة هي المتوسط المرجح للقيم اللاحقة محيّنة أو مخصومة :

$$Pu = e^{-0.1*1/2}[0 * 0{,}6454 + 0 * (1 - 0.6454)] = 0$$
$$Pd = e^{-0.1}[0 * 0{,}6454 + 24{,}64(1 - 0{,}6454)] = 8{,}31$$

عند الخطوة الأولى حيث توجد عقدة واحدة نتيجتها هي قيمة الخيار، وتتمثل في المتوسط المرجع للقيم اللاحقة مخصوم كذلك، ونكتب :

$$P = e^{-0.1*1/2}[0 * 0{,}6454 + 8{,}31(1 - 0{,}6454)] = 2{,}8034$$

إذا قيمة خيار البيع الأوربي في ظل نموذج ثنائي الحد ذو الخطوتين هي: **2,8034** دولارا، ويمكن تلخيص ذلك في الشكل التالي:

3.تقييم الخيارات باستخدام نموذج ثنائي الحد متعدد الفترات

CRR

إن فكـــرة نمـــوذج CRR تتمثل في التفكير أولاً في أن مسار سعر الأصل محل الـــتعاقد يتبع التوزيع ذي حدين، لكن بعد توسيع نطاق النتائج ننتقل إلى التوزيع الطبيعي Gaussian.

تتمـــثل أهمية نموذج CRR في تجنب النماذج في الزمن المستمر التي تؤدي إلى الـــتعامل بالمعادلات التفاضلية العشوائية، وغالبًا ما يكون من الصعب معالجتها والعمل بها، لذلك النماذج في الزمن المنفصل أو المتقطع تكون أبسط.

4.2 الصيغة الرياضية العامة لنموذج CRR

تم تقديم النموذج سنة 1976 من طرف كل من كوكس، روس وروبنشتاين لذلك يرمـــز لـــه فـــي الكثير من المراجع ب (CRR) . يقوم النموذج على تتبع تطور سعر الأصـــل محـــل التعاقد من خلال شجرة تنتج عن القيم المحتملة لهذا السعر في الفترات المتوالية والتي تمثل عدد معين من المحطات تفصل بين تاريخ التقييم وتاريخ الاستحقاق، كمـــا يعـــرف النموذج على انه عملية حساب تكرارية (Itérative) تستخدم شجرة ثنائي الحـــد مكونة من عدد معين من العقد كل منها يمثل عندها السعر المحتمل للأصل محل التعاقد في فاصل من مدة حياة الخيار. كما أن مقاربة النموذج تقوم على زيادة عدد هذه التكرارات بتخفيض فواصل المحطات التي يعرفها التطور السعري.

يجب التذكير إلى أن سعر الأصل محل التعاقد يسير عشوائيا عند النقاط المنفصلة فـــي الـــزمن. بالنسبة للحساب التطبيقي طول الفترة الخاصة بكل تغير في سعر الأصل يعبر عنها بالسنوات والتي تقسم إلى مجموعة من الفواصل الخطوات nليتم بعدها حساب قيم u و d انطلاقا من معطيات التذبذب التاريخي والذي يعطى بالتباين σ(Ecart type) ، يمكن اعتبار التذبذب كنسبة من قيمة الأصل.

يقوم هذا النموذج على نفس الفكرة السابقة لشجرة ثنائي الحد، حيث سعر الأصل محل التعاقد يتحرك صعودا أو هبوطا خلال كل خطوة زمنية جزئية $\frac{t}{n}$ بمعاملي ارتفاع وانخفاض هما على التوالي:

« up » $u = e^{\sigma.\sqrt{T/n}}$

« down » $d = e^{-\sigma.\sqrt{T/n}}$

تحـرك سعر الأصل صعودا أو هبوطا في كل خطوة يكون مرجح باحتمال كما لاحظنا سابقا، حيث يحسب احتمال الارتفاع كما يلي:

$$p = \frac{e^{r.T/n} - d}{u - d}$$

أما احتمال الانخفاض فيحسب كما يلي:

$$q = 1 - p$$

يمكن حساب قيمة خيار الشراء حسب نموذج بالعلاقة الرياضية التالية :

$$C = \frac{1}{(e^{r.dt})^n}.\left[\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right).p^{j}(1-p)^{(n-j)}.MAX\ [0; up^{j}.down^{(n-j)}.S - K]\right]$$

ويمكن الحصول على $\frac{n!}{j!(n-j)!}$ من جدول باسكال.

ومن ثمة يتم حساب القيمة التالية من اجل كل j من 0 إلى n :

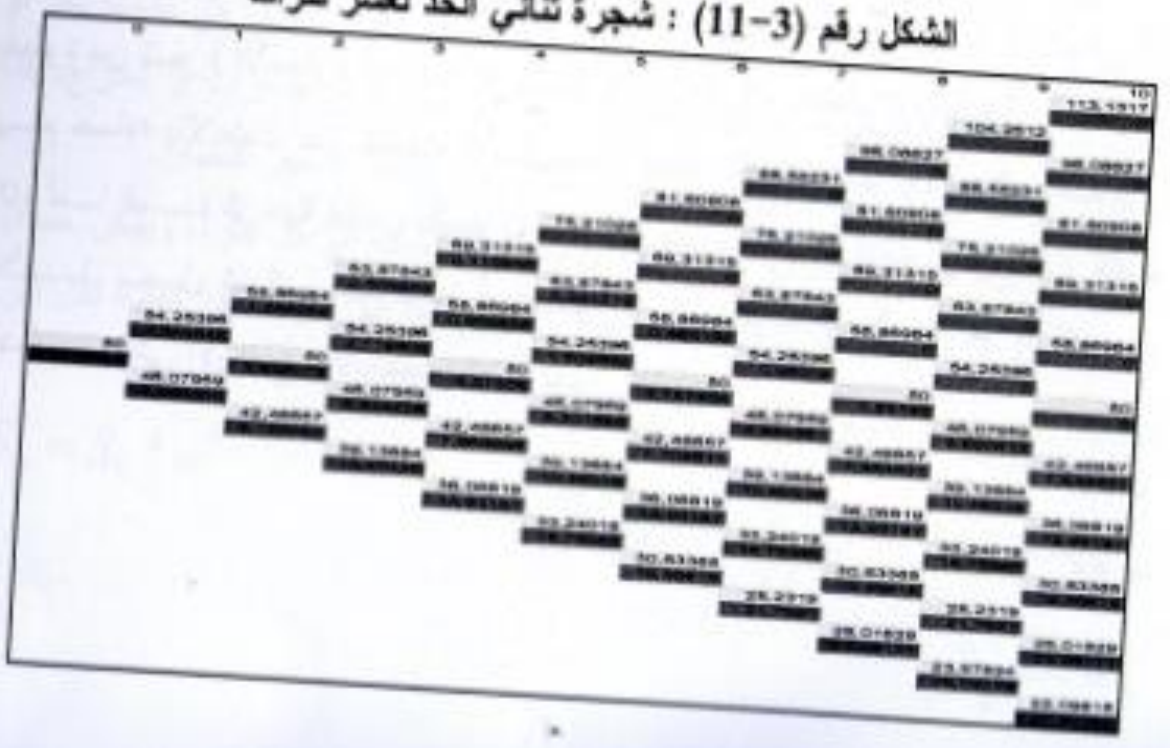
$$\frac{1}{(e^{r.T/n})^n}.\left[\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right).p^{j}(1-p)^{(n-j)}.MAX\ [0; u^{j}.d^{(n-j)}.S - K]\right]$$

بجمع كل نتيجة نحصل في الأخير على قيمة خيار الشراء

4.3 الشكل العام لنموذج ثنائي الحد متعدد الفترات (شجرة ثنائي الحد لعشر خطوات)

لإبـراز نمـوذج ثنائـي الحـد متعدد الفترات نعرض الشجرة التالية ذات عشر خطوات لسعر أولي 50 كما يلي:

الشكل رقم (3-11) : شجرة ثنائي الحد لعشر فترات



4.4 مراحل تقييم الخيارات باستعمال نموذج CRR

تقييم الخيارات باستخدام هذه الطريقة، كما هو موضح، تشمل ثلاث مراحل أساسية:

1. إنشاء شجرة السعر، Price treegeneration، وذلك من خلال تقسيم مدة الاستحقاق إلى مجموعة من الفترات الزمنية تكون متساوية وعددها n. وحساب كل من معامل الارتفاع u ومعامل الانخفاض d ثم بعدها الاحتمالات المرتبطة بكل منها.
2. حساب مختلف القيم الجوهرية (intrinsèques) في نهايات الفترة الأخيرة Calculation of option value at each final node
3. حساب حساب عكسي للقيم الجوهرية المتوسطة المخصومةللخيار في كل فترة سابقة Sequentialcalculation of the option value ateachprecedingnode.

وفيما يلي كل مرحلة بالتفصيل:

4.4.1 المرحلة الأولى : إنشاء شجرة الأسعار Pricestreegeneration

يتم إنشاء شجرة الأسعار من خلال العمل إلى الأمام forward والتطلّع نحو تاريخ التقييم لانتهاء الصلاحية أو تاريخ تنفيذ العقد.في كل خطوة من المفترض أن الأصل محل التعاقد سوف يتحرك صعودا أو هبوطا بعامل معين (u أو d) في كل خطوة من شجرة الأسعار، أي $S_{up}= S.u$, $S_{down} = S.d$، معامل الارتفاع أو الانخفاض يتم حسابه بالاعتماد على تقلبات الأصل محل التعاقد المعبر عنها بالانحراف المعياري σ. أما المدة الزمنية فتقاس بالسنوات t وتأخذ بعين الاعتبار الأيام أو خطوات التقييم للأصل محل التعاقد، ومع شرط أو فرضية أن تباين لوغاريتم السعر هو $\sigma^2 t$، ويتم حساب معاملي الارتفاع والانخفاض على النحو التالي:

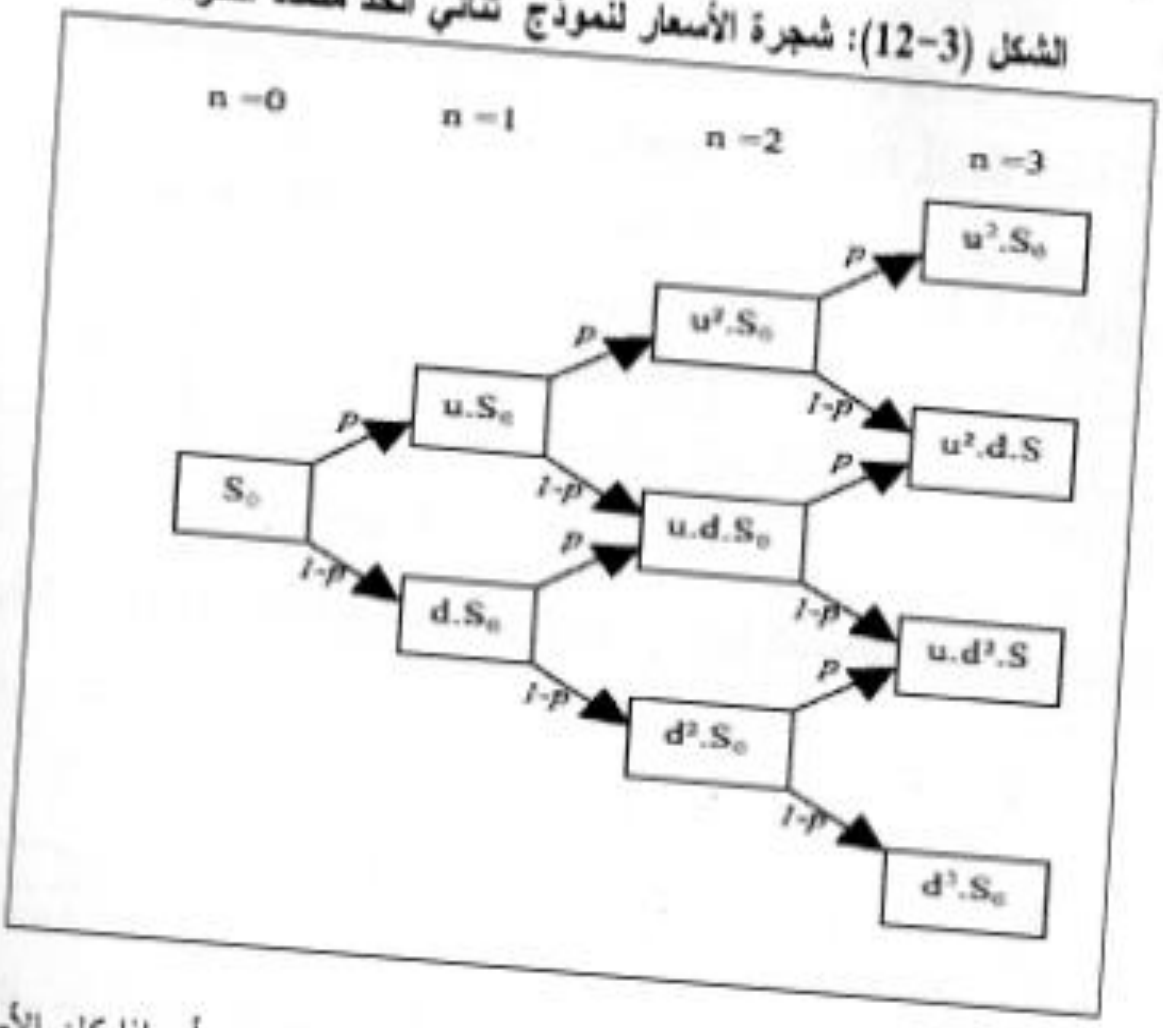
$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}} = \frac{1}{u}$$

$$p = \frac{e^{rT/n} - d}{u - d}$$

يـتم إنشاء شجرة الأسعار من خلال معلمات النموذج وسعر الأصل محل التعاقد الأولي لثلاث خطوات كما يلي:

الشكل (3-12): شجرة الأسعار لنموذج ثنائي الحد متعدد الفترات



يـتضمن نموذج CRR أن الشجرة هي الحركة العادية للسعر، أي إذا كان الأصل يتحـرك في وحتى ذلك الحين إلى أسفل (d، u)، وسعر سوف تكون هي نفسها كما لو كانت قد انتقلت إلى أسفل ثم لأعلى (u ،d) – هنا في اثنين دمج مسارات أو تمتزج. هذا الخاصية يقلل من عدد العقد في الشجرة، وبالتالي يسرع حساب سعر الخيار.

تـسمح هـذه الخاصية أيضا قيمة الأصول الأساسية في كل فترة، ويمكن حساب مباشـرة عـن طريق الصيغة، ولا يحتاج أن الشجرة أن نبني أولا. فإن القيمة لكل فترة تحسب على النحو التالي:

$$S_n = S_0 * u^{N_u - N_d}$$

4.4.2 المرحلة الثانية: حساب مختلف القيم الجوهرية في نهاية الفترة الأخيرة

ببساطة قيمة الخيار هي القيمة الجوهرية المجسدة في الفرق بين السعر السوقي وسعر الممارسة، ونكتب :

بالنسبة لخيار الشراء:

$max[S - K; 0]$, For a call option

بالنسبة لخيار البيع:

$\max[K - S; 0]$, For a put option

في نهاية الشجرة يتم حساب القيمة الجوهرية للخيار وهي لا تختلف إن كان الخيار أوربيا أو أمريكيا، لكن عند الرجوع للخلف يكون هناك اختلاف في الحساب كما لاحظنا سابقا في نموذج ثنائي الحد ذو الفترتين.

4.4.3 المرحلة الثالثة: حساب عكسي للقيم الجوهرية المتوسطة للخيار في كل فترة سابقة

بعد حساب القيمة الجوهرية في نهاية الشجرة أو الفترة الأخيرة عند كل عقدة في الأعلى والأسفل، تبقى عملية الرجوع للخطوة ما قبل الأخيرة وتكون عكسية (Backward)، والطريقة لا تختلف عن ما لاحظناه في نموذج ذو الحد للفترتين، وهي تختلف من الخيار الأوربي والأمريكي.

4.5 تقييم الخيارات الأوروبية باستخدام نموذج CRR

بعد حساب سعر الخيار في كل عقدة عند نهاية الشجرة في كل عقدة والذي يحدد من خلال الفرق بين سعر الأصل محل التعاقد وسعر التنفيذ. يتم تحديد قيمة الخيار للفترة السابقة (أي الخطوة ما قبل الأخيرة) من خلال تحيين القيم اللاحقة في العقد من خلال العلاقة التالية:

$$C = e^{-rT/n}[Cup + Cd(1-p)]$$
$$P = e^{-rT/n}[Pup + Pd(1-p)]$$

يمكن القول أن قيمة الخيار في كل عقدة لاحقة هي المتوسط الحسابي المرجح باحتمال الصعود والهبوط والمحيّن أو المخصوم للقيمتين الموليتين للعقدة، وهكذا نكرر العملية حتى لأول عقدة والتي تمثل قيمة الخيار في بداية الشجرة.

4.6 تقييم الخياراتالأمريكية باستخدام نموذج CRR

تختلف الخيارات الأمريكية في طريقة التقييم وهي أكثر تعقيدا، لاسيما خيار البيع، حيث ان خيار الشراء الأوربي لايختلف عن خيار الشراء الأمريكي. بخصوص خيار البيع الأمريكي انطلاقا من القيم الجوهرية عند الاستحقاق، يجب أن نختبر عند كل عقدة إلى غاية بداية شجرة ثنائي الحد ما إذا كانت القيمة المحسوبة في الخيار الأوربي هي أكبر من القيمة الجوهرية عند كل خطوة أم لا، حيث نأخذ القيمة الأكبر بينهما، كما لاحظنا ذلك في نموذج ثنائي الحد ذو الفترتين، ونكتب :

$$P = max\left[K - S; e^{-r*T/n}[\text{Pup} + Pd(1-p)]\right]$$

أي نحسب عند كل عقدة قيمة الخيار ممثلة في المتوسط الحسابي المرجح والمحين، ونقارنه مع القيمة الجوهرية ونختار أكبرهما، كما يبدو في المعادلة وهكذا دواليك إلى أن نصل إلى العقدة الأولى في الشجرة، حيث عند هذه النقطة نحسب المتوسط المرجح المحين فقط وهو قيمة الخيار. وفيما يلي عرض لمثال مفصل حول حساب قيمة الخيار تبعا لكل نوع شراء أو بيع أوربيا كان ام أمريكيا.

4.7 مثال تطبيقي شامل حول تقييم الخيارات باستخدام نموذج ثنائي الحد متعدد الفترات

يوجد عقد خيار عقد خيار على سهم ليس به توزيعات، سعره السوقي 45 لمدة صلاحية سنة، التقلب السنوي30%، ومعدل العائد الخالي من المخاطرة 8% . إذا كان سعر الممارسة 50، وعدد الخطوات هو 5 فأوجد قيمة الخيار باستخدام نموذج ثنائي الحد في كل حالة من الحالات التالية :

a) خيار شراء أوربي
b) خيار بيع أوربي
c) تأكد من خاصية التعادل بين خيار الشراء والبيع
d) خيار شراء أمريكي
e) خيار بيع أمريكي

في البداية خصائص العقد هي :

$S = 45,\ K = 50,\ r = 8\%,\ \sigma = 30\%,\ N = 5,\ ' = 1\text{year}.$

لابـــد في البداية من حساب المعلماء الأساسية التي تعتبر متشابهة لكل الخيارات التي نرغب في تقييمها وهي معاملي الارتفاع والانخفاض والاحتمال حيث نجد :

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}} = e^{0.3\sqrt{1/5}} = 1{,}1435$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}} = 1/u = 0{,}8744$$

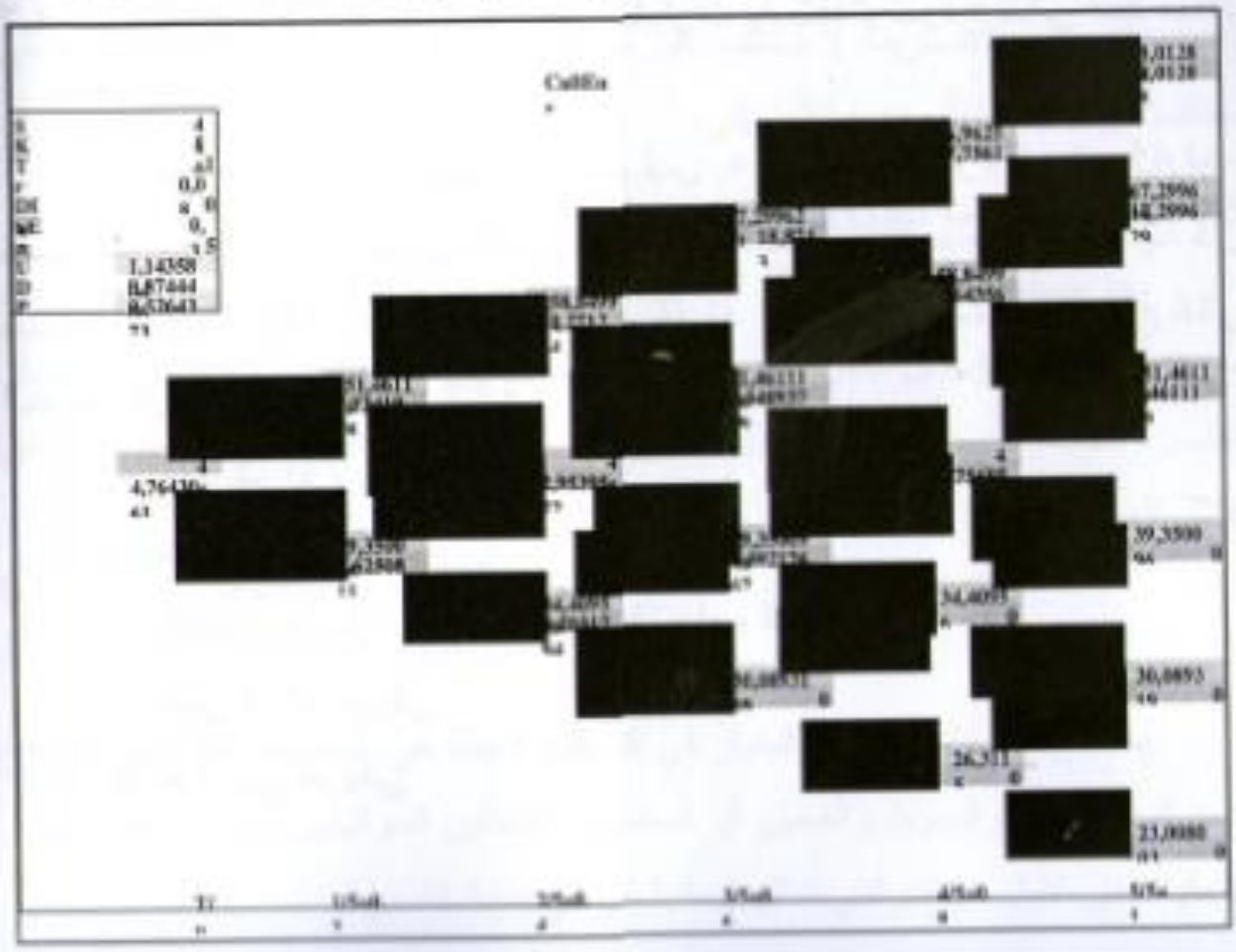
$$p = \left(\frac{e^{rT/n} - d}{u - d}\right) = 0{,}52643$$

$$1 - p = 0.47357$$

a) حساب قيمة خيار شراء أوربي باستخدام نموذج CRR متعدد الفترات

فـــي البداية نقوم بحساب أسعار السهم من خلال ضرب السعر الأولى في معامل الارتفاع للأعلى وفي معامل الانخفاض للأسفل، وبعد انشاء شجرة الأسعار يمكن حساب قيمة الخيار عند كل عقدة من والشكل التالي يبرز ذلك:

الشكل (3-13): قيمة خيار شراء أوربي باستخدام نموذج CRR متعدد الفترات



حيث كل عقدة يتم حسابها على النحو التالي:

فـــي الخطـــوة الأخير نحسب مباشرة القيمة الجوهرية ممثلة في الفرق بين سعر السهم المحسوب وسعر الممارسة من الأعلى إلى الأسفل ونكتب:

$Max\ (S - K\ ;0)$

$= 88.01 - 50 = 38.01$

$= 67.29 - 50 = 17.29$

.....

$Max\ (23 - 50\ ;0) = 0$

عـــند الخطـــوة الثانية لابد من حساب قيمة الخيار عند كل عقدة من الأعلى إلى الأسفل على النحو التالي:

$$27.75 = e^{-0.08*1/5}(38.01 * 0{,}5264 + 17.3 * 0.4736)$$

$$9.64 = e^{-0.08*1/5}(17.3 * 0{,}5264 + 1.46 * 0.4736)$$

.....

$$0 = e^{-0.08*1/5}(0 * 0{,}5264 + 0 * 0.4736)$$

نكـــرر نفـــس المـــنهج على جميع العقد حتى نصل إلى بداية الشجرة، عن العقدة الأولى نجد قيمة الخيار التي تحسب كمايلي :

$$4.75 = e^{-0.08*1/5}(7.73 * 0{,}5264 + 1.62 * 0.4736)$$

b) حساب قيمة خيار بيع أوربي باستخدام نموذج CRR متعدد الفترات

لا تختلف القيم في شجرة أسعار لأي نوع من انواع الخيارات لنفس المعطيات، وبالتالي الاختلاف يكون في قيم الخيار التي تختلف باختلاف طبيعة الخيار، وللقيام بذلك نتبع الخطوات التالية:

فـــي الخطـــوة الأخير نحسب مباشرة القيمة الجوهرية ممثلة في الفرق بين سعر السهم المحسوب وسعر الممارسة من الأعلى إلى الأسفل ونكتب:

$Max\ (K - S\ ;0)$

$= 0$

$= 0$

.....

$Max\ (50 - 23\ ;0) = 27$

عـند الخطـوة الثانية لابد من حساب قيمة الخيار عند كل عقدة من الأعلى إلى الأسفل على النحو التالي:

$$0 = e^{-0.08*1/5}(0*0{,}5264 + 0*0.4736)$$

.....

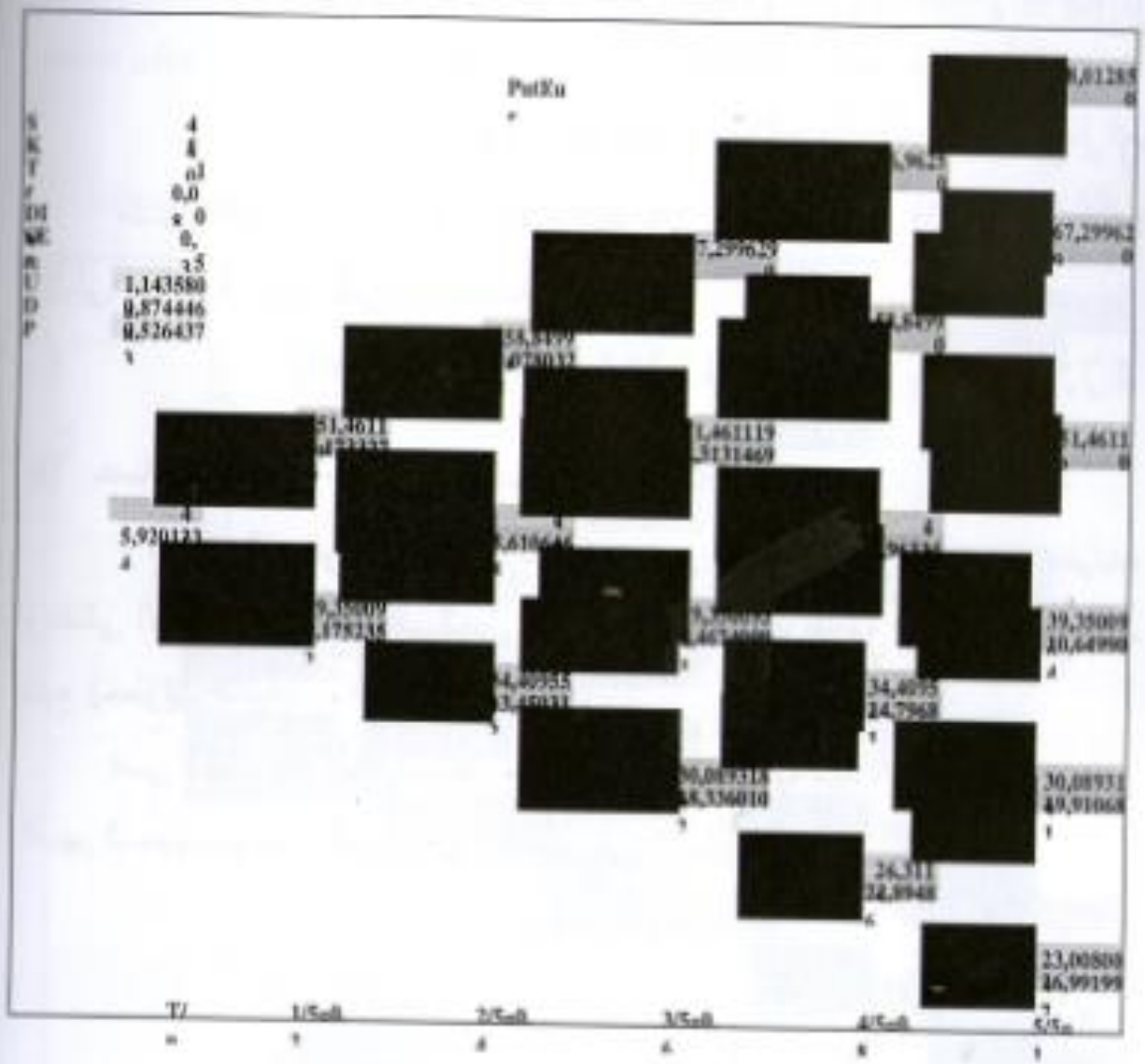
$$22.89 = e^{-0.08*1/5}(19.91*0{,}5264 + 27*0.4736)$$

نكـرر نفـس المـنهج على جميع العقد حتى نصل إلى بداية الشجرة، عن العقدة الأولى نجد قيمة الخيار التي تحسب كمايلي :

$$5.92 = e^{-0.08*1/5}(3.173*0{,}5264 + 9.175*0.4736)$$

يلخص الشكل التالي شجرة ثنائي الحد لخمس خطوات وقيمة خيار البيع الأوربي:

الشكل (3-14): قيمة خيار شراء أوربي باستخدام نموذج CRR متعدد الفترات



c) **التأكد من خاصية التعادل بين خيار الشراء والبيع**

يمكن التأكد ببساطة من خاصية التكافؤ بين خيار الشراء والبيع على النحو التالي:

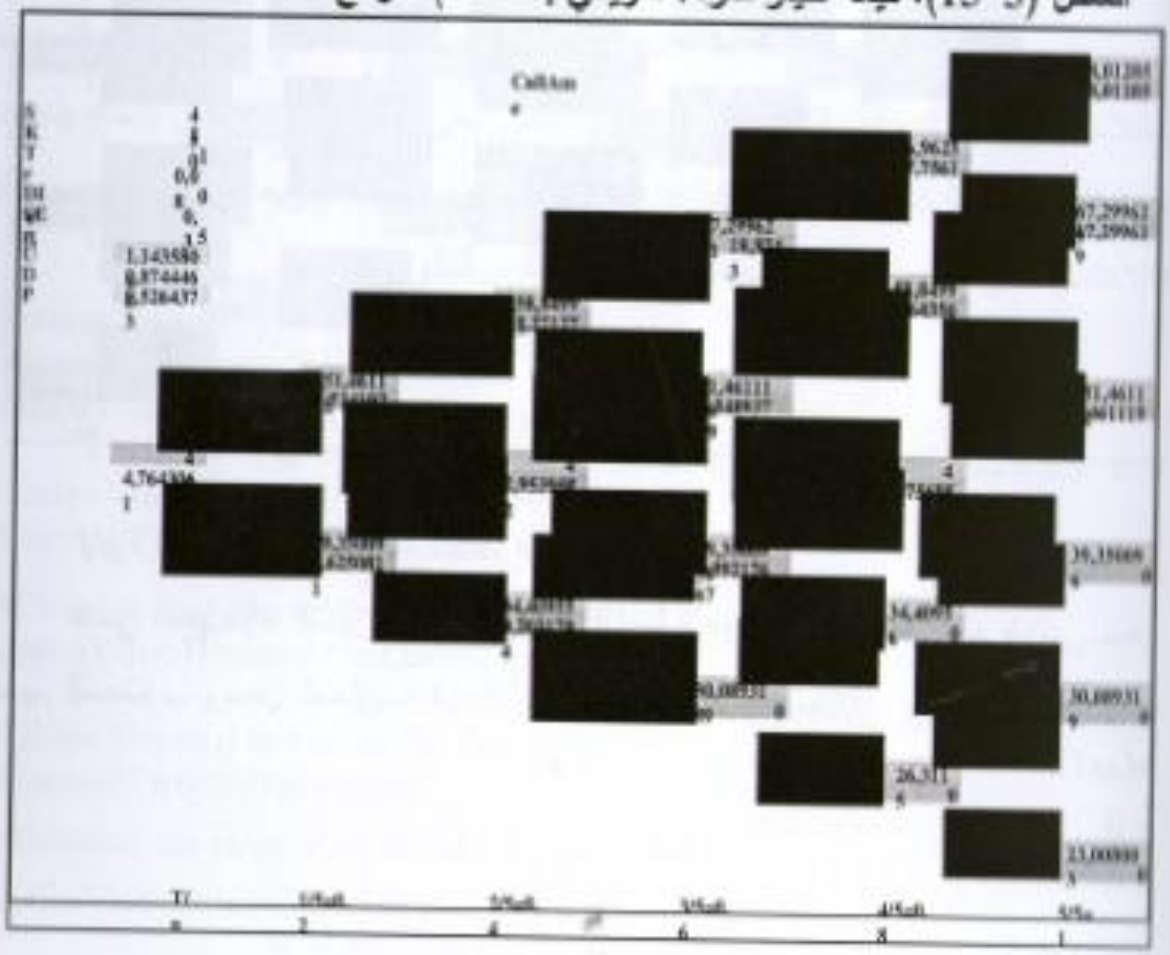
$$P = C + Ke^{-rT} - S$$

$$4.76 + 50e^{-0.08*1} - 45 = 5,92$$

d) **حساب قيمة خيار شراء أمريكي باستخدام نموذج ثنائي الحد متعدد الفترات**

شـــجرة ثنائـــي الحـــد لخمس خطوات وقيمة خيار الشراء الأمريكي ملخصة في الشكل التالي:

الشكل (3-15): قيمة خيار شراء أمريكي باستخدام نموذج CRR متعدد الفترات

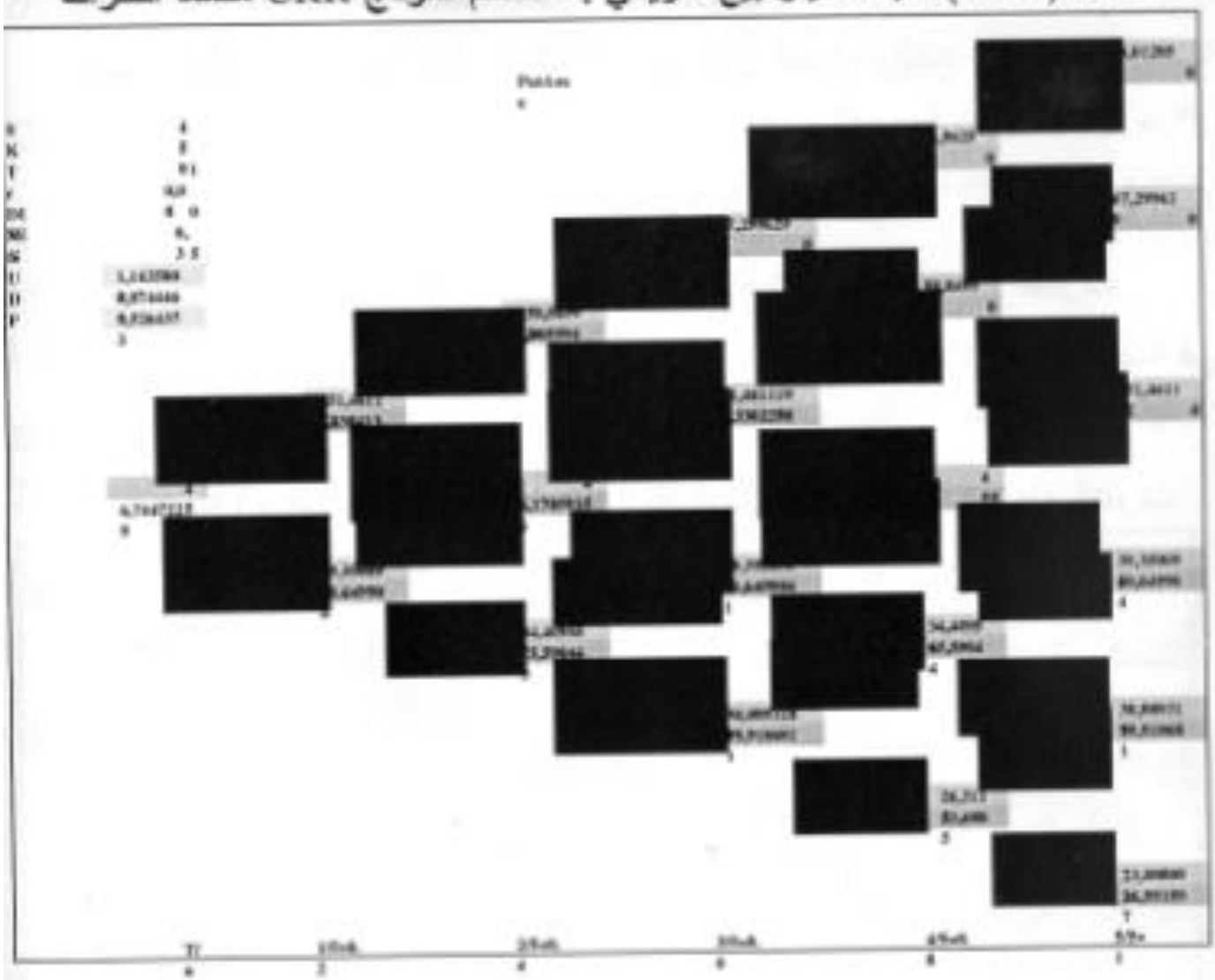


نلاحظ أن قيمة خيار الشراء الأمريكي لا تختلف عن قيمة خيار الشراء الأوربي

e) **حساب قيمة خيار بيع أمريكي باستخدام نموذج ثنائي الحد ذو فترتين**

يكمـــن الاختلاف بين طريقة حساب قيمة خيار البيع الأمريكي وقيمة الخيار في الخطـــوة ما قبل الأخيرة، ولإبراز ذلك نعرض شجرة ثنائي الحد لخمس خطوات وقيمة خيار البيع الأمريكي في الشكل التالي:

الشكل (3-16): قيمة خيار بيع أمريكي باستخدام نموذج CRR متعدد الفترات



لإبراز كيفية الحساب نتبع الخطوات التالية:

فـــي الخطـــوة الأخير نحسب مباشرة القيمة الجوهرية ممثلة في الفرق بين سعر السهم المحسوب وسعر الممارسة من الأعلى إلى الأسفل ونكتب:

$Max(K - S;0)$

$= 0$

$= 0$

.....

$Max(50 - 23;0) = 27$

عـــند الخطـــوة الثانية لابد من حساب قيمة الخيار عند كل عقدة من الأعلى إلى الأسفل على النحو التالي:

$$0 = Max\left(K - S; e^{-0.08*1/5}(0 * 0{,}5264 + 0 * 0.4736)\right)$$

.....

$$23.68 = Max\left(K - S; e^{-0.08*1/5}(19.91 * 0{,}5264 + 27 * 0.4736)\right)$$
$$= Max\left(50 - 26.31; 22.89\right) = Max\left(23.68; 22.89\right)$$

نكـــرر نفـــس المـــنهج على جميع العُقد حتى نصل إلى بداية الشجرة، عن العقدة الأولى نجد قيمة الخيار التي تحسب كما يلي:

$$6.74 = e^{-0.08*1/5}(3.438 * 0{,}5264 + 10.649 * 0.4736)$$

مقياس: الهندسة المالية (سلسلة الأعمال الموجهة 5 و 6 و7)

التمرين3- 1:

لنفترض أن الوضعية تجاه تحركات أسعار الأسهم خلال حياة خيار أوروبي الذي يتبع توزيع ذو الحدين لفترتين، اشرح لماذا أنه من غير الممكن إنشاء مركز أو وضعية من الأسهم والخيار ذات مخاطرة طوال مدة حياة الخيار.

الحـــل: تتكون المحفظة الخالية من المخاطرة من مركز قصير في الخيار ومركز طـــويل فـــي الأسهم بقيمة Δ. بما أن Δ هي مقياس للتغيرات التي تطرأ على مدى عمر الخـــيار، يجـــب أن تتغيـــر هذه المحفظة خالية المخاطرة. حسب دلتا، وبالتالي لا توجد وضعية للمخاطرة في ظل محفظة التحوّط.

التمرين3-2:

ســـعر سهم حاليا 50$. سيكون بعد شهرين 53 $أو 48 $. معدل الفائدة الخالي مـــن المخاطـــر هـــو 10 ٪ سنويا وهو مستمر. ما هي قيمة خيار شراء أوروبي لمدة شـــهرين بـــسعر ممارســـة قدره 49$ معتمدا على فرضية غياب فرصة للمراجحة أو التحكيم؟ تأكد من النتيجة باستخدام احتمال المخطر المحايد.

الحل:

فـــي النهاية بعد شهرين قيمة خيار الشراء ستكون إما 4 $ (إذا كان سعر السهم 53 $ وسعر الممارسة 49$) أو 0 $ (إذا كان سعر السهم 48$).

لتكن لدينا محفظة تتكون أسهم Shares وخيار Option أي :

$+\Delta$: shares
-1 : option

قـــيمة المحفظـــة هي : 48Δ أو $53\Delta-4$، وفق فرضية غياب المراجحة لابد أن تكـــون قيمة المحفظة بعد شهرين عند الارتفاع مساوية لقيمة المحفظة عن الانخفاض ، أي:

$$48\Delta = 53\Delta - 4$$

وبالتالي نجد أن :

$$\Delta = 0.8$$

يمكـــن القول أن قيمة محفظة التحوّط بعد شهرين هي : 38,4، لكن كم هي قيمة محفظة التحوّط اليوم ؟

ســـعر السهم اليوم هو 50 $، إذا المحفظة تتكون من سهم ذو مركز طويل (تدفق موجب) وخيار ذو مركز قصير (تدفق سالب)، ونكتب :

$$0.8 \times 50 - f$$

حـــيث f هي قيمة الخيار، إذا قيمة المحفظة بعد شهرين هي قيمة المحفظة اليوم مـضروبة فـــي معامـــل الرسملة، أو العكس قيمة المحفظة اليوم هي قيمة الحالية لقيمة المحفظة بعد شهرين، أي :

$$(0.8\times 50 - f)e^{0.10\times 2/12} = 38.4$$

وبالتالي نجد أن قيمة الخيار هي : $f = 2.23$ أي 2.23$،

يمكـــن تأكيد هذه النتيجة من خلال حساب معلمات نموذج ثنائي الحد، حيث نجد أن:

معامل الارتفاع (الزيادة من50 إلى 53 هي نسبة 6 في المائة) : $u = 1.06$

معامل الانخفاض (الانخفاض من 50 إلى هي 48 هي نسبة 4 في المائة):
$d = 0.96$

الاحتمال :
$$p = \frac{e^{0.10\times 2/12} - 0.96}{1.06 - 0.96} = 0.5681$$

بتطبيق العلاقة الخاصة بقيمة خيار الشراء نجد أن:

$f = e^{-0.10\times 2/12} \times 0.5681 \times 4 = 2.23$ ، وهـــي ذاتهـــا المحـــسوبة بطريقة محفظة التحوط.

التمرين3- 3 :

يـــبلغ سعر السهم حاليا 80 $. بعد نهاية أربعة أشهر سيكون إما 75$ أو 85$. معدل الفائدة الخالي من المخاطر هو 5٪ سنويا. ما هي قيمة خيار بيع أوربي لمدة أربعة أشـــهر حـــيث سعر الممارسة هو 80 $معتمدا على فرضية غياب فرصة للمراجحة أو التحكيم؟ تأكد من النتيجة باستخدام طريقة احتمال المخطر المحايد.

الحـــل: بعـــد نهاية أربعة أشهر قيمة الخيار ستكون إما 5$ (إذا كان سعر السهم 75$) أو $ 0 (إذا كـــان سعرالـــسهم $ 85). المحفظة التي تتكون من خيار بيع وسهم هي:

$-\Delta$: shares

$+1$: option

وبالتالي ، قيمة محفظة التحوّط بعد أربعة أشهر هي:

-85Δ أو $-75\Delta+5$

$$-85\Delta=-75\Delta+5$$

أي :

$$\Delta=-0.5$$

نلاحظ أن Δ بإشارة سالبة لأنها تخص خيار البيع فقط، قيمة محفظة التحوط في نهاية المدة هي : 42.5

القيمة الحالية للمحفظة هي :

$$0.5\times80+f$$

وبالتالي نجد أن قيمة الخيار fهي :

$$(0.5\times80+f)e^{0.05\times4/12}=42.5$$
$$f=1.80$$

قيمة خيار البيع الأوربيf هي : 1.80$.

يمكـــن تأكيد هذه النتيجة من خلال حساب معلمات نموذج ثنائي الحد، حيث نجد أن:

معامل الارتفاع : $u=1.0625$

معامل الانخفاض : $d=0.9375$

الاحتمال : $p=\dfrac{e^{0.05\times4/12}-0.9375}{1.0625-0.9375}=0.6345$ و $1-p=0.3655$

بتطبيق العلاقة الخاصة بقيمة خيار الشراء نجد أن:

$$f=e^{-0.05\times4/12}\times0.3655\times5=1.80$$

التمرين3-4 :

ســـعر السهم حاليا 40$. في نهاية ثلاثة أشهر سيكون إما 45 $أو 35 $. معدل الفائدة الخالي من المخاطر المستمر هو 8٪ سنويًا. احسب قيمة خيار الشراء الأوروبي لمـــدة ثلاثـــة أشـــهر على السهم بسعر ممارسة قدره 40$. تحقق من أن طريقتي عدم المراجحة والتقييم المحايد للمخاطر تعطي نفس الإجابات.

الحـــل: بعـــد نهاية أربعة أشهر قيمة الخيار ستكون إما 5$ (إذا كان سعر السهم 35$) أو 0$ (إذا كان سعر السهم 45$). المحفظة التي تتكون من خيار بيع وسهم هي:

$-\Delta$: shares

$+1$: option

وبالتالي، قيمة محفظة التحوّط بعد أربعة أشهر هي :

$-35\Delta + 5$ أو -45Δ

$$-35\Delta + 5 = -45\Delta$$
$$\Delta = -0.5$$

نلاحـــظ أن Δ بإشـــارة سالبة لأنها تخص خيار البيع ، قيمة محفظة التحوط في نهاية المدة هي :22.5

القيمة الحالية للمحفظة هي :

$$-40\Delta + f$$

وبالتالي نجد أن قيمة الخيار fهي ::

$$(40\times 0.5 + f)\times 1.02 = 22.5$$
$$f = 2.06$$

قيمة خيار البيع الأوربي f هي: 2.06$. حيث $e^{-rT/n} = e^{-0.08*3/12} = 1.02$

يمكن تقييم الخيار بطريقة أخرى وهي طريقة التقييم المحايد للمخاطرة. لنفترض أن p هي احتمال ارتفاع سعر السهم، ففي عالم يسوده محايدة المخاطرة يكون لدينا :

$$45p + 35(1-p) = 40\times 1.02$$
$$10p = 5.8$$
$$p = 0.58$$

وبالتالي قيمة الخيار وفق هذه الطريقة تساوي:

$$0\times 0.58 + 5\times 0.42 = 2.10$$

القيمة الحالية للخيار هي:

$$\frac{2.10}{1.02} = 2.06$$

حيث نلاحظ أنها مساوية للقيمة المحسوبة بطريقة غياب فرصة للمراجحة.

التمرين 3-5:

سعر سهم حاليا هو 50$. مدة حياته ثلاثة أشهر، من المتوقع أن يرتفع بنسبة 6٪ أو ينخفض بنسبة 5٪. معدل الفائدة الخالي من المخاطر المستمر هو 5٪ سنويا. ما هي قـيمة خيار الشراء الأوروبي لمدة ستة أشهر مع سعر ممارسة 51$؟ تحقق من علاقة

تكافؤ خيار الشراء والبيع للنوع الأوربي. إذا كان خيار البيع أمريكيًا، فهل من الأفضل أن ممارسه مبكرًا وفي أي من العقد على الشجرة تتم الممارسة؟

الحـــل: تـــتلخص في الشجرة التالية عملية تقييم خيار البيع حيث تم حساب القيمة عند كل نقطة كما يلي:

في الخطوة الثانية عند نهاية الشجرة نحسب القيمة الجوهرية ممثلة في الفرق بين سعر الممارسة والسعر السوقي المحسوب بدلالة معاملي الارتفاع والانخفاض ونكتب:

$$51-50.35=0.65$$
$$51-45.125=5.875$$

في الخطو الثانية لابد من خصم متوسط القيمة المتحصل عليها في نهاية الشجرة ونكـــرر نفس العلمية للعقدة الأولى عند بداية الشجرة لنحصل على قيمة خيار البيع كما يلي:

$$(0.65\times2\times0.5689\times0.4311+5.875\times0.4311^2)e^{-0.05\times6/12}=1.376$$

للـــتأكد مـــن تحقق فرضية تكافؤ خيار الشراء والبيع put–call parity، نكتب ما يلي:

$$C+S=P+Ke^{-rT}$$

أي :

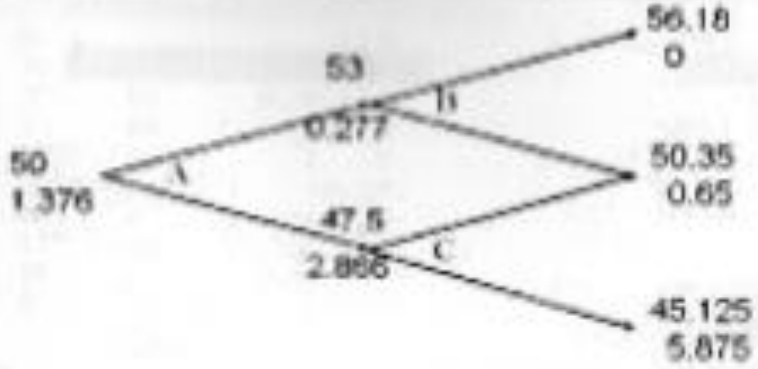
$$1.376+50=51.376$$
$$1.635+51e^{-0.05\times6/12}=51.376$$

إذا كـــان الخـــيار أمـــريكيا فلابد من مقارنة القيمة الجوهرية (K-S) مع القيمة المحـــسوبة للنوع الأوربي عند كل عقدة للخطوة الأولى وماقبلها، وبالتالي نجد أن القيمة الجوهـــرية أكبـــر عند العقدة السفلى للخطوة الأولى حيث كانت القيمة الجوهرية أكبر، ونكتب:

$$51-47.5=3.5$$

وهـــي أكبر من 2.8664 وبالتالي يمكن تنفيذ الخيار الأمريكي عند العقدة c ولا يمكن تنفيذه عند A أو B. والشجرة التالية تبين ذلك.

الشكل (3-24): شجرة ثنائي الحد للتمرين 3-5



التمرين3-6 :

الـسعر الحالـي للسهم شركة جيغلو بدون توزيعات هو 650$ مع تقلب 35٪. معدل العائد بدون مخاطرة هو 10٪. من أجل خطوة زمنية مدتها ثلاثة أشهر:

a) ما هي النسبة المئوية للارتفاع؟

b) ما هي النسبة المئوية للانخفاض؟

c) ما هو احتمال الارتفاع في عالم محايد من المخاطر؟

d) ما هو احتمال الانخفاض في عالم محايد من المخاطر؟

e) استخدم شجرة من خطوتين لتقييم خيار شراء أوروبي وخيار بيع أوروبي لمدة ستة أشهر. في كلتا الحالتين سعر الممارسة هو640$.

الحل:

a) معامـل الارتفاع يحسب كما يلي : $u = e^{0.35\times\sqrt{0.25}} = 1.1912$ وبالتالي النسبة المئوية للارتفاع هي 19,12% .

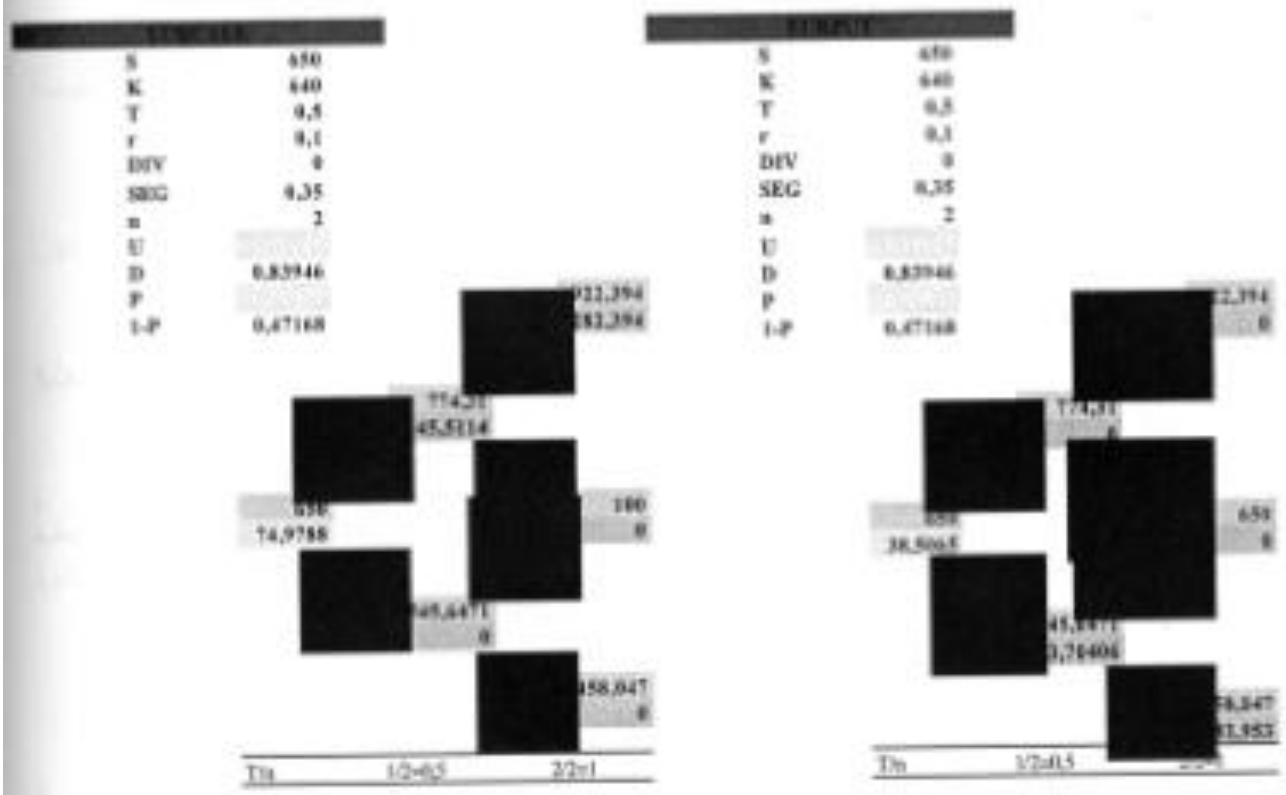
b) معامـل الانخفاض يحسب كما يلي: $u = e^{-0.35\times\sqrt{0.25}} = 1/1.1912 = 0.8394$ وبالتالي النسبة المئوية للارتفاع هي 16,06% .

c) احتمال الارتفاع$(e^{0.1\times0.25)} - 0.8394)/(1.1912 - 0.8394) = 0.5283$

d) احتمال الانخفاض $1 - 0.5283 = 0.4716$

e) قـيمة خيار الشراء والبيع الأوربيين هي 74,97، 38,50 على التوالي وهي

الشكل (3-25): شجرة ثنائي الحد للتمرين 3-6



التمرين3-7 :

يـبلغ ثقلب سهم شركة ما ليس به توزيعات أرباح 25٪. سعره السوقي 120$، معـدل العائد خال المخاطرة 7 ٪ سنويا لجميع آجال الاستحقاق. قم بحساب قيم دلتو p عـند استخدام خطوة زمنية لمدة شهرين. إذا كان هناك خيار شراء أوروبي لمدة أربعة أشهر بسعر ممارسة قدره 124$ فقم بإنشاء شجرة ذات الحدين من خطوتين تبرز قيمة الخيار. أحسب دلتا.

لنفترض أن هناك مؤسسة مالية تبيع 1000 خيار (10 عقود). ما هو الموقف في الأسهم الضروري للتحوط من موقف التاجر في وقت التداول؟

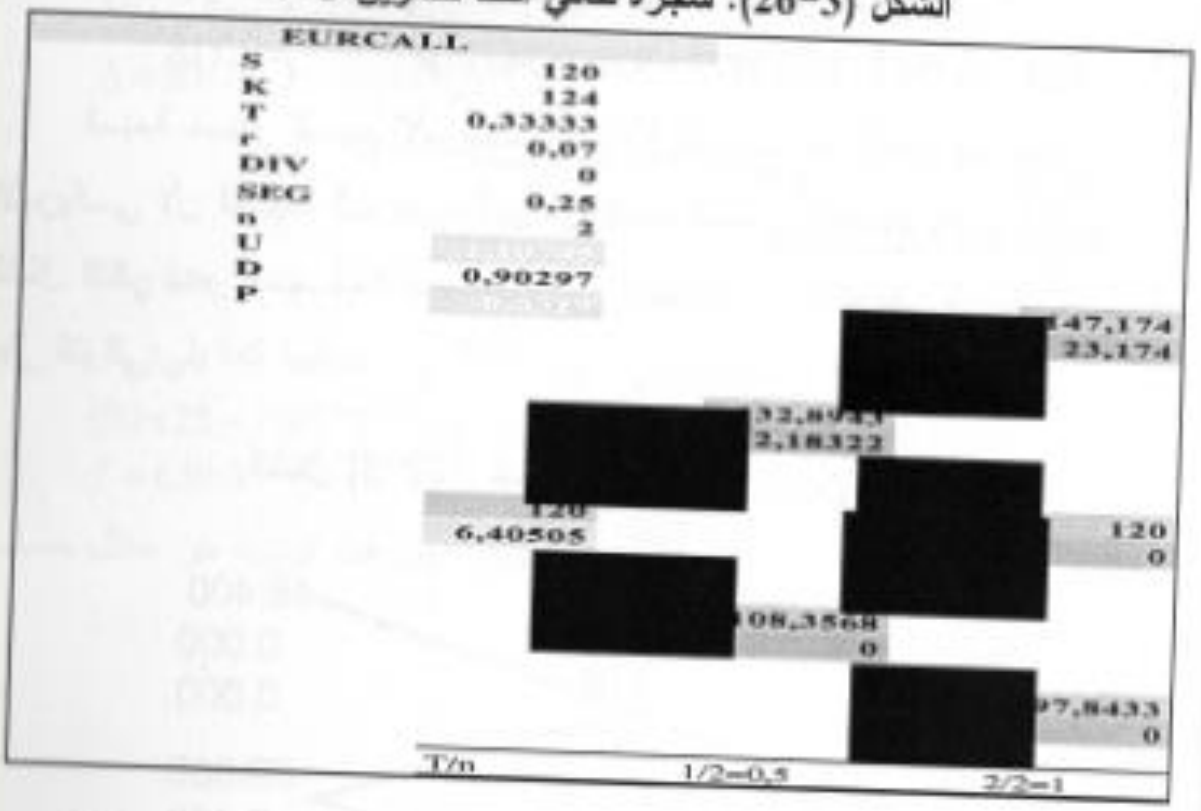
الحل:

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}} = e^{0.25\sqrt{(4/12)/2}} = 1.1074$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}} = \frac{1}{u} = 0.9029$$

$$p = \frac{e^{rT/n} - d}{u - d} = 0.5319$$

الشكل (3-26): شجرة ثنائي الحد للتمرين 3-7



$$\Delta = \frac{\Delta C}{\Delta S} = \frac{12{,}183 - 0}{132.894 - 108.356} = 0.497$$

نلاحـــظ أن قيمة الخيار بلغت 6,4 $لكل خيار شراء. بخصوص التحوط نلاحظ أن دلـــتا تـــساوي 0,497، أي لابد من شراء 497 سهم للتحوط من وضعية بيع 1000 خيار.

التمرين 3-8:

وســـعر الـــسهم حاليا 40$. خلال كل فترة من فترتي الثلاثة أشهر المقبلة، من المتوقع أن ترتفع بنسبة 10٪ أو تنخفض بنسبة 10٪. معدل الفائدة الخالي من المخاطر هو 12٪ سنويا مع رسملة مستمرة.

- ما هي قيمة خيار البيع الأوروبي لمدة ستة أشهر مع سعر ممارسة 42 $؟
- ما هي قيمة خيار البيع الأمريكي لمدة ستة أشهر مع سعر ممارسة 42 $؟

الحل:

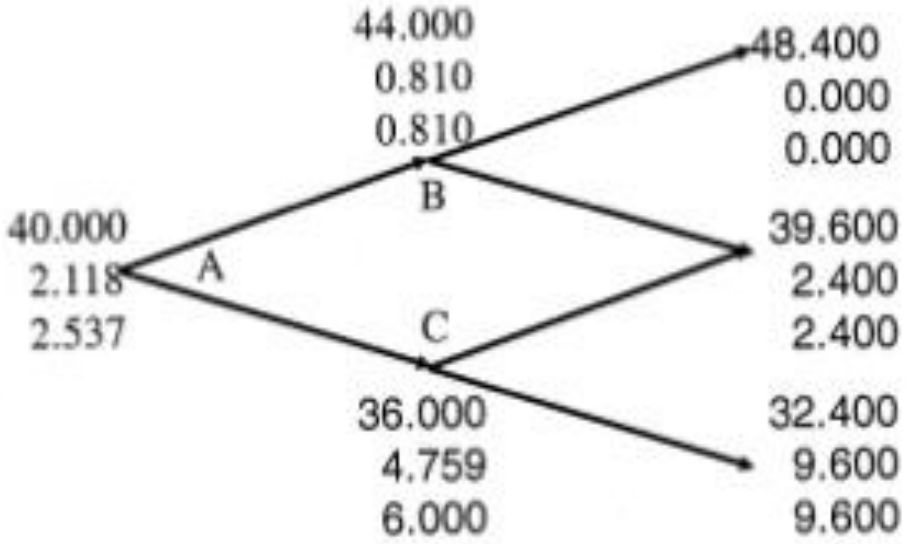
احتمال ارتفاع السعر يحسب كما يلي: $p = \frac{e^{0.12\times 3/12} - 0.90}{1.1 - 0.9} = 0.6523$

قيمة خيار البيع الأوربي حسب طريقة احتمال الخطر المحايد هي :

$$[2.4\times2\times0.6523\times0.3477+9.6\times0.3477^2]e^{-0.12\times6/12}=2.118$$

قيمة خيار البيع الأمريكي هي 2,53، حيث عند العقدة يتم ممارسة الخيار الأمريكي لأن القيمة الجوهرية أكبر من القيمة المحسوبة بخصم القيمة اللاحقة، يبرز الشكل التالي سعر السهم قيمة الخيار الأوربي وقيمة الخيار الأمريكي في ثلاث مستويات على التوالي:

الشكل (3-27): شجرة ثنائي الحد للتمرين 3-8



التمرين 3-9:

سعر السهم حاليا 25$. بعد شهرين سيكون 23$ أو 27$. معدل الفائدة الخالي من المخاطر المستمر هو 10٪ سنويا. لنفترض أن سعر السهم S_T بعد شهرين. ما هي قيمة المشتق المالي الذي يسمح بالحصول على مربع السعر السوقي S_T^2 في هذا الوقت؟

الحل:

في نهاية الفترة بعد شهرين، مربع السعر هو 529$ في حالة الارتفاع و729$ في حالة الانخفاض، نعمل على تكوين محفظة من الأسهم والمشتق المالي:

$+\Delta$: shares

-1 : derivative

وبالتالي ، قيمة محفظة التحوّط بعد أربعة أشهر هي:

$$27\Delta - 729 \text{ or } 23\Delta - 529$$
$$27\Delta - 729 = 23\Delta - 529$$
$$\Delta = 50$$

قيمة محفظة التحوط في نهاية المدة هي:621$.

القيمة الحالية للمحفظة هي :

$$50 \times 25 - f$$

وبالتالي نجد أن قيمة المشتق المالي /هي639.3$ وتم حسابها كما يلي :

$$(50 \times 25 - f)e^{0.10 \times 2/12} = 621$$
$$f = 639.3$$

يمكـــن تقيـــيم المـــشتق بطريقة أخرى يمكن تأكيد هذه النتيجة من خلال حساب معلمات نموذج ثنائي الحد، حيث نجد أن :

معامل الارتفاع : $u = 1.08$

معامل الانخفاض : $d = 0.92$

الاحتمال : $p = \dfrac{e^{0.10 \times 2/12} - 0.92}{1.08 - 0.92} = 0.6050$

بتطبيق العلاقة الخاصة بقيمة خيار الشراء نجد أن :

$$f = e^{-0.10 \times 2/12}(0.6050 \times 729 + 0.3950 \times 529) = 639.3$$

التمرين 3-10:

خـــيار بـــيع أوربـــي لمدة ستة أشهر على الأسهم غير الموزعة للأرباح له سعر الممارســـة يبلغ 25 دولار. سعر السهم السوقي هو 25$، والمعدل الخالي من المخاطر هـــو 5 ٪ ســـنويا ، والـــتقلب هو 18٪ سنويا. استخدم شجرة ثنائية الحد من خطوتين لحساب سعر الخيار الأوربي. اوجد سعر الخيار اذا كان الخيار هو خيار شراء أوربي.

الحل: لدينا:

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}} = e^{0.18\sqrt{1/2}} = 1,0941$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}} = 1/u = 0,9139$$
$$p = \left(\frac{e^{rT/n} - d}{u - d}\right) = 0,5473$$
$$1 - p = 0.4527$$

نماذج تقييم الخيارات في الزمن المستمر ونموذج بلاك سكولز

3. نموذج بلاك-سكولز Black and Scholes (1973)

حقق فيشر بلاك، ميرون سكولز، وروبرت ميرتون في أوائل 1970s، انجازا كبير في تسعير خيارات الأسهم الأوروبية وتطوير ما أصبح يعرف باسم نموذج بلاك سكولز أو بلاك سكولز ميرتون أو B MS. كان لهذا النموذج تأثير كبير على الطريقة التي يتداول بها المتداولون وخيارات التحوط. كما أنها كانت محورية لنمو ونجاح الهندسة المالية.جاء اعتراف بأهمية هذا النموذج في عام 1997 عندما حصل ميرون سكولز وروبرت ميرتون على جائزة نوبل في الاقتصاد.

توفي فيشر بلاك في عام 1995؛ خلاف ذلك، وقال انه بلا شك أيضا كان واحدا من المستفيدين من هذه الجائزة.كيف حقق بلاك، سكولز، وميرتون انفراجهم؟ الباحثون السابقون قاموا بافتراضات مشابهة لتلك الخاصة بهم وقاموا بحساب الربح المتوقع بشكل صحيحمن خيار أوروبي. ومع ذلك، من الصعب معرفة ذلك معدل الخصم الصحيح لاستخدام لهذا العائد.استخدم بلاك وسكولز نموذج تسعير الأصول الرأسمالية لتحديد العلاقةبين عائد السوق المطلوب على الخيار والعائد المطلوب على السهم. لم يكن هذا سهلا لأن العلاقة تعتمد على كل من سعر السهم والزمن. كان نهج ميرتون مختلفًا عن نهج بلاك وسكولز. تسعيره نموذج تشارك في إنشاء محفظة خالية من المخاطر تتكون من الخيار والأسهم الأساسية ويدعون أن العائد على المحفظة خلال فترة قصيرة الوقت يجب أن يكون العائد الخالي من المخاطر لكن أكثر تعقيدًا لأن المحفظة تتغير باستمرار عبر الزمن.

يعتبر نهج ميرتون أكثر عمومية من نهج بلاك وسكولز لأنه يفعل ذلك لا تعتمد على افتراضات نموذج تسعير الأصول الرأسمالية.يعرض هذا الفصل نموذج بلاك -سكولز-ميرتون لتقييم خيار الشراء وخيار البيع الأوروبي على الأسهم غير الموزعة للأرباح،كما نناقش الافتراضات التي يقوم عليها،وأيضا أكثر من الفصول السابقة في معنى التقلبات ويبين كيف يمكن تقدير التقلب إما من البيانات التاريخية أوضمنيًا من أسعار الخيارات. نحو نهاية الفصل نوضح كيف يمكن تمديد نتائج Scholes – Merton للتعامل مع خيار الشراء وخيار البيع للأسهم مدفوعة التوزيعات.

3.1 تقديم نموذج B S

قدمت هذا إصدارات مختلفة من صيغة بلاك-سكولز-ميرتون المقدمة في الأدبيات. يتم اشتقاق جميع الصيغ في هذا القسم في الأصل بناءً على سعر الأصل محل التعاقد S يتبع حركة براونية هندسية:

$$dS = S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW(t)$$

حـيث μ هو المعدل الآني المتوقع للعائد على الأصل الأساسي، هو التقلب الآني لمعدل العائد، وdW هي سيرورة Wiener .

قـدم كـل من Black Fisher et Myron Scholes في بداية السبعينات (1972) نمـوذج لتقيـيم الخيارات مبني على جملة من الفرضيات، وقد لقي هذا النموذج تطبيقا واسعا لدى المحللين الماليين، حيث أصبح هذا النموذج المرجع الرئيسي في مجال تقييم الخيارات في الأسواق المنظمة.

3.2 فرضيات نموذج B S

يقـوم هذا النموذج على بناء محفظة مكونة من أصل بدون مخاطرة وأصول بها مخاطرة والمتمثلة في الأصل محل التعاقد، وذلك تحت جملة من الفرضيات والتي يمكن حصرها في النقاط التالية:

- الخيار من النوع الأوروبي.
- معدل الفائدة قصير الأجل معروف وثابت.
- يتبع الأصل الأساسي مسارًا عشوائيًا بمعدل تباين نسبي
- سعر السهم أو الأصل محل التعاقد لا يدفع أي أرباح أو توزيعات أخرى.
- لا توجد تكاليف معاملات ويسمح بالبيع على المكشوف.
- أي مستثمر يمكن بيع الأوراق الذي لا يمتلكه أو يمتلكه.
- يتم التداول باستمرار والشكل القياسي لرأس المال.
- أسعار الأسهم تتحرك بشكل عشوائي (Randomly)
- أسعار الأسهم تتبع التوزيع اللوغاريتم الطبيعي(Lognormal Distribution)؛
- الـتذبذب أي الانحـراف المعـياري (σ) لعوائد الأسهم ثابتة خلال فترة حياة الخيار؛
- عدم وجود ضرائب .
- السوق المالي يتمتع بالكفاءة.

فيما يلي بعض التفصيل حول أهم الفرضيات:

3.2.1 فرضية أسعار الأسهم تتحرك بشكل عشوائي (Randomly)

يقوم نموذج تسعير خيار الأسهم على بعض الافتراضات حول كيفية تطور أسعار الأسهم بمرور الوقت .إذا كان سعر السهم هو 100 دولار اليوم، ما هو التوزيع الاحتمالي للسعر في يوم واحد أو في أسبوع واحد أو في سنة واحدة؟ينظر نموذج بلاك-سكولز-ميرتون إلى أن السهملا توجد به توزيعات للأرباح وأن العائد على السهم في فترة زمنية قصيرة يتبع التوزيع الطبيعي كما يفترض ان تكون العوائد في فترتين مختلفتين غير متجاورتين مستقلة.

متوسط العائد في الفترة هو $\mu\nabla t$ أما الانحراف المعياري فهو $\sigma\sqrt{\nabla t}$، وفقا لفرضية نموذج بلاك سكولزفإن الأسعار تتبع التوزيع الطبيعي على النحو التالي:

$$\frac{\nabla S}{S} \rightarrow N(\mu\nabla t, \sigma^2\nabla t)$$

حيث التغير في السعر ∇Sفي الفترة الصغيرة ∇t أما $N()$ فهي تشير الى التوزيع الطبيعي بأمل وتباين معلومين، وبالتالي الانحراف المعياري هو $\sigma\sqrt{\nabla t}$، فإذا افترضنا ان الانحراف المعياري السنوي هو 30 في المائة أو 0،3 فإن الانحراف المعياري الأسبوعي هو $0.3\sqrt{52} = 4.16\%$، أو يمكن العكس حساب السنوي انطلاقا من الأسبوعي.

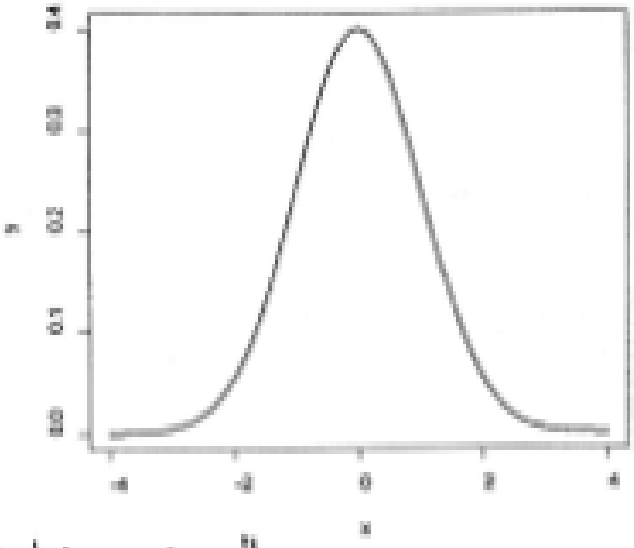
3.2.2 فرضية أسعار الأسهم تتبع التوزيع اللوغاريتم الطبيعي

يتم التعامل في الأجلين القصير والطويل؛ ففي الفترات الزمنية الطويلة لكي تكون النتائج أكثر دقة من الضروري معرفة التوزيع الاحتمالي الذي يتبعه سعر السهم في المستقبل. الافتراض السابق لهذا الافتراض يعتبر أن سعر السهم في المستقبل يتبع التوزيع لوغاريتم الطبيعي وليس التوزيع الطبيعي؛ إذا فما الفرق بينهما؟

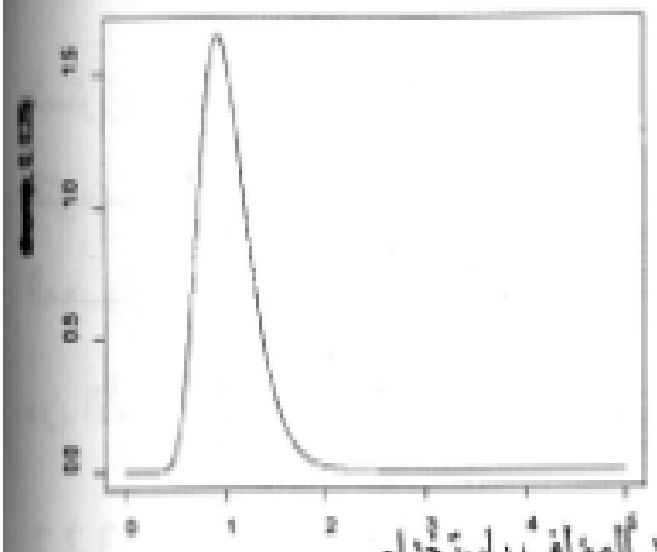
يمكن تمثيل التوزيعين بيانيا للتمييز بينهما، ولذلك نستخدم برمجية R يمكن تمثيل التوزيع اعتمادا على الكود التالي:

الشكل العام للتوزيعين لوغاريتم الطبيعي والطبيعي يظهر التوزيع في المخرجات التالية:

الشكل(5-1) : التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي



الشكل(5-2) : التمثيل البياني للتوزيع لوغاريتم الطبيعي



المصدر : من اعداد المؤلف باستخدام برمجية R

يبدو من الشكل اختلاف كبير بين التوزيعين؛ المتغير ذو التوزيع الطبيعي يمكن أن يأخذ أي قيمة موجبة أو سالبة، في حين تقتصر قيم المتغير الموزع لوغاريتم طبيعي على القيم الموجبة فقط. التوزيع الطبيعي متماثل. التوزيع اللوغاريتم طبيعي منحرف الوسط، الوسيط، ووضع مختلف.

المتغير ذو التوزيع اللوغاريتمي لديه خاصية أن لوغاريتم المتغير موزع طبيعيا، وهو افتراض بلاكسكولز – ميرتون لأسعار الأسهم، حيث يعني أن لوغاريتم السعر ln ST يتبع التوزيع الطبيعي، حيث ST هو سعر السهم في وقت مستقبلي T. المتوسط والانحراف المعياري للوغاريتم السعر ln ST يمكن كتابتهما على النحو التالي:

$$\frac{LnS_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

السعر المتوقع مستقبلا هو : $E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$

أما تباين السعر المتوقع مستقبلا فهو :

$$\text{var}(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T}\left(e^{\sigma 2T} - 1\right)$$

وبالتالي يمكن القول أن لوغاريتم السعر يتبع التوزيع الطبيعي ونكتب:

$$Ln\frac{S_T}{S_0} \rightarrow N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

3.2.3 فرضية عدم المراجحة

الحجـــج التي يمكن استخدامها لأسعار الخيارات هي مماثلة للتحكيم أو المراجحة في الحجج المستخدمة سابقا عندما يفترض أن التغيرات في أسعار الأسهم ذات الحدين أو ثنائـــي الحـــد. المحفظة الخالية من المخاطرة تتكون من الخيار والسهم أو الأصل محل التعاقد. في غياب فرص المراجحة، العائد للمحفظة يجب أن يكون هو ذاته معدل العائد خـــال المخاطرة r. ينتج عن هذا معادلة تفاضلية يجب أن تكون محققة لذلك عن طريق الخيار. السبب في إمكانية إنشاء محفظة خالية من المخاطر هو أن سعر السهم أو الأصل محـــل الـــتعاقد وســـعر الخيار يتأثر كل منهما بنفس المصدر الأساسي لعدم اليقين وهو تحركات سعر السهم. في أي فترة زمنية قصيرة، يكون سعر خيار الشراء يرتبط ارتباطا تاما موجبا بسعرالسهم أوالأصل محل التعاقد؛ سعر خيار البيع هو تماما يرتبط سلبا مع ســـعر الـــسهم الأساسي. في كلتا الحالتين، عند تكوين محفظة من الأسهم والخيار في الأخيـــر الربح أو الخسارة من الأسهم يعوض دائما الربح أو الخسارة من الخيار بحيث القيمة الإجمالية للمحفظة في نهاية الفترة القصيرة من الوقت تكون معروفة وشبه مؤكدة، حيث سنناقش هذا الموضوع في محفظة دلتا المحايدة.

3.3 اشتقاق نموذج B S والصيغة الرياضية له

قبل عرض صيغة نموذج بلاك سكولز نود عرض المعادلة التفاضلية لـــ Black-Scholes، حـــيث أن قـــيمة خيار الشراء ct في وقت t، تعتمد على متغيرين. ثانيًا، ما

مقدار الوقت المتاح حتى انتهاء صلاحية خيار الشراء ؟ كلما زاد الوقت المتبقي لارتفاع سعر السهم، زادت قيمة هذا الوقت. وبالتالي لدينا قيمة خيار شراء في الوقت t بناءً على متغيرين، بدلاً من الخاصية المتغيرة الوحيدة للمعادلات التفاضلية العادية التالية:

$$c_t = c(S_t, t)$$

باستخدام نموذج الحركة البراونية لسعر السهم، وتقنية من حساب التفاضل والتكامل العشوائي المعروفة باسم بما إيتو Ito's lemma، فإنه يمكن إثبات أن التغير في قيمة خيار الشراء يكتب على النحو التالي:

$$dc_t = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S \frac{\partial c}{\partial S} dB_t$$

نذكر أنه يمكن إنشاء محفظة محمية أو متحوطة بشكل كامل perfectly hedged portfolio بحيث يتم تعويض التغير في سعر السهم تمامًا بتغير في سعر خيار الشراء، وذلك بسبب امتلاك الأسهم بما يتناسب مع هذا التحوط أو دلتا يتم إعطاء تغيير في قيمة هذه المحفظة عن طريق المعادلة التالية:

$$d\pi = dc - \Delta dS = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\right) dt$$

مع ذلك، هذه المحفظة المتحوطة لها نفس العائد بغض النظر عن حركة سعر السهم. بالنظر إلى محفظة التحوط π، و r سعر الفائدة الخالي من المخاطر، من خلال عدم فرضية المراجحة، يجب أن يكون العائد على المحفظة في تغيير معين في الوقت dt، مساوياً للمعدل الخالي من المخاطرة r:

$$d\pi = r\pi dt = r\left(c - \frac{\partial c}{\partial S} \cdot S\right) dt$$

المعادلات مساوية لبعضها البعض يمكن تبسيطها كما يلي:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = rc - rS\frac{\partial c}{\partial S}$$

جعل هذه المعادلة يساوي صفر ينتج لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية لـ Black-Schol كما يلي :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0$$

$$c(S,T) = \max(S - K, 0)$$

مـــن خـــلال تغطية المنطق الذي ساهم في تطوير هذه المعادلة التفاضلية، سوف يقـدّر القـــارئ الـــرؤية التي كانت مطلوبة من قبل بلاك وسكولز من أجل تطوير هذه المعادلـــة .فـــي حين أن تطوير هذه المعادلة كان حقا تقدم مفاجئ في المعرفة، التحدي المتمـــثل في حل المعادلة لا تزال قائما ! هذه المعادلة عبارة عن معادلة تفاضلية جزئية خطـــية ذات قيم حدية حيث أن قيمة خيار الشراء في وقت انتهاء الصلاحية تساوي قيمة أكبر من الصفر أو سعر السهم S ناقص سعر التنفيذ.K

لحـــل هذه المعادلة التفاضلية، يجب إجراء التحولات، تماما مثل بداية المعادلات التفاضـــلية الجزئية العادية ODE حيث نقوم بإجراء بدائل لحل نظام تفاضلي خطي من الرتبة الثانية، وأعاد بلاك وسكولز كتابة معادلاتهما باستخدام التحويلات. أول تحول تم إجراؤه كان :

$$c^* = c \cdot e^{r(T-t)}, \qquad S^* = S \cdot e^{r(T-t)},$$

then

$$c = c(S,t) \implies c^* = c^*(S^*,t),$$

$$c = c^* e^{-r(T-t)}, \qquad S = S^* e^{-r(T-t)}.$$

3.4 الصيغة الرياضية لنموذج B S

يعـــد نمـــوذج Black Scholes نموذجا لتقييم الخيارات في شكل دالة أو حركة بـــراونية حـــسابية لتتبع حركة أسعار الأسهم والتوزيع الطبيعي لعائد الأسهم، حيث قام بصياغة نموذج رياضي لتقييم الخيار الأوروبي بدون توزيعات.

3.4.1 الصيغة الرياضية لنموذج B S لخيار الشراء

$$c(S,T) = SN(d_1) - e^{-rT} KN(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

حيث:

S: السعر السوقي للأصل محل التعاقد؛

K: السعر التنفيذ؛

r: معدل العائد الخالي من المخاطرة سنوي؛

t: مدة العقد بالسنوات؛

e: أساس اللوغاريتم الطبيعي؛

(N): دالة كثافة الاحتمال؛

σ^2: تباين السعر السوقي للأصل محل التعاقد.

3.4.2 الصيغة الرياضية لنموذج B S لخيار البيع

تتعلق العلاقة السابقة بخيار الشراء ويمكن استخدام نفس الصيغة لتقييم خيار البيع:

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \times T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

ما يلاحظ على صيغة نموذج بلاك سكولز أنها تحدد الفرق بين السعر السوقي للأصل محل التعاقد وسعر الممارسة بالترجيح لكليهما باحتمال الحدوث، فبعد تحديد السعر المتوقع يتم استحداثه بدالة أسية ذات معلمتين هما معدل المردودية بدون مخاطرة ومدة حياة الخيار.

3.5 مثال حول تقييم خيار الشراء الأوربي باستعمال نموذج B S

مـــا هـــو سعر خيار الشراء الأوروبي على الأسهم غير الموزعة للأرباح عندما يكـــون سعر السهم 52 دولارًا، وسعر الممارسة 50 دولارًا، وسعر الفائدة بدون مخاطر 12٪ سنويًا، والتقلب هو 30٪ سنويًا، ووقت الاستحقاق هو ثلاثة أشهر؟

الحل:

$S_0 = 52,\ K = 50,\ r = 0.12,\ \sigma = 0.30,\ T = 0.25.$

$$d_1 = \frac{\ln(52/50) + (0.12 + 0.3^2/2)0.25}{0.30\sqrt{0.25}} = 0.5365$$

$$d_2 = d_1 - 0.30\sqrt{0.25} = 0.3865$$

بالرجوع الى جدول التوزيع الطبيعي يمكن استخراج احتمال d2 ، d1 ، أو يمكن اســـتعمال مايكروسوفت اكسل مباشرة للدالة (LOI.NORMALE.STANDARD(0.5365=، ونحسب قيمة خيار الشراء الأوربي كما يلي :

$$52N(0.5365) - 50e^{-0.12\times0.25}N(0.3865)$$
$$= 52\times0.7042 - 50e^{-0.03}\times0.6504$$
=5,05

3.6 مثال حول تقييم خيار البيع الأوربي باستعمال نموذج B S

ما هو سعر خيار البيع الأوروبي على الأسهم غير الموزعة للأرباح عندما يكون ســـعر الـــسهم42 دولارًا، وسعر الممارسة40 دولارًا، وسعر الفائدة بدون مخاطر 10٪ سنويًا، والتقلب هو 20٪ سنويًا، ووقت الاستحقاق هو ستة أشهر؟

الحل :

S=42, K=40, r=01, σ=0.2 , T=0.5

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(42/40) + (0.1 + 0.2^2/2)0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.7693$$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ =0.7693-0.2 $0.5^{1/2}$=0.6278

Ke^{-rt} =40 $Ke^{-0.05}$ =38.049

P = 38.049 N(-0.6278) – 42 N(-0.7693)

N(0.7693) = 0.7791, N(−0.7693) =1−N(0.7693) = N(0.7693) = 0.2209

N(0.6278) = 0.7349 N(-0.6278) = 0.2651

P=0.808

مقياس: الهندسة المالية (سلسلة الأعمال الموجهة 8 و 9 و 10)

التمرين 5- 1:

سعر السهم حاليا هو 40 دولارا لنفترض أن العائد المتوقع من السهم هو 15٪ وأن معدل تقلباته هو 25٪. ما هو التوزيع الاحتمالات لمعدل العائد (مع الرسملة المستمرة) المكتسب خلال فترة عام واحد في ظل نموذج بلاك سكولز؟

الإجابة:

في هذه الحالة $\mu = 0.15$ و $\sigma = 0.25$ يكون التوزيع الاحتمالي لمعدل العائد على مدى سنة واحدة مع الرسملة المستمرة هو التوزيع الطبيعي ونكتب:

$$N\left(0.15 - \frac{0.25^2}{2}, 0.25^2\right)$$

أي

$$N(0.11875, 0.25^2)$$

القيمة المتوقعة للعائد هي 11.875 ٪ سنويا والانحراف المعياري هو 25.0 ٪ سنويا.

التمرين 5-2:

سـهم لديـه عائـد متوقع بنسبة 16٪ وتقلب بنسبة 35٪. السعر الحالي هو 38 دولار.

a) ما هو احتمال أن يتم تنفيذ خيار الشراء الأوروبي على السهم بسعر ممارسة 40 دولار وتاريخ استحقاق في ستة أشهر؟

b) مـا هـو احتمال أن يتم بيع خيار أوروبي على السهم بنفس سعر الممارسة والاستحقاق؟

الإجابة :

a) الاحـتمال المطلوب هو احتمال أن يكون سعر السهم أعلى من 40 دولار في غضون ستة أشهر .نفترض أن سعر السهم في ستة أشهر .التوزيع الاحتمالي لـ Ln ST هو:

$$N\left\{\ln 38+\left(0.16-\frac{0.35^2}{2}\right)0.5,\ 0.35^2\times 0.5\right\}$$

أي $N(3.687\ ,\ 0.247^{\ 2})$

$\ln 40 = 3.689$ وبالتالي الاحتمال هو :

$$1-N\left(\frac{3.689-3.687}{0.247}\right)=1-N(0.008)$$

من جداول التوزيع العادية $N\ (0.008) = 0.5032$ بحيث يكون الاحتمال المطلوب هو 0.4968.

b) فـي هذه الحالة، الاحتمال المطلوب هو احتمال أن يكون سعر السهم أقل من 40 دولارًا في ستة أشهر هو:

$$1-0.4968=0.5032$$

التمرين 5-2:

سـهم لديـه عائـد متوقع بنسبة 16٪ وتقلب بنسبة 35٪. السعر الحالي هو 38 دولار.

a) ما هو احتمال أن يتم تنفيذ خيار الشراء الأوروبي على السهم بسعر ممارسة 40 دولار وتاريخ استحقاق في ستة أشهر؟

b) مـا هـو احتمال أن يتم بيع خيار أوروبي على السهم بنفس سعر الممارسة والاستحقاق؟

الإجابة :

a) الاحـتمال المطلوب هو احتمال أن يكون سعر السهم أعلى من 40 دولار في غضون ستة أشهر .نفترض أن سعر السهم في ستة أشهر .التوزيع الاحتمالي لـ Ln ST هو:

$$N\left\{\ln 38+\left(0.16-\frac{0.35^2}{2}\right)0.5,\ 0.35^2\times 0.5\right\}$$

أي $N(3.687,\ 0.247^2)$

$\ln 40 = 3.689$ وبالتالي الاحتمال هو :

$$1-N\left(\frac{3.689-3.687}{0.247}\right)=1-N(0.008)$$

من جداول التوزيع العادية $N(0.008) = 0.5032$ بحيث يكون الاحتمال المطلوب هو 0.4968.

b) فـي هذه الحالة، الاحتمال المطلوب هو احتمال أن يكون سعر السهم أقل من 40 دولارًا في ستة أشهر هو:

$$1-0.4968=0.5032$$

التمرين5-3 :

بالرجوع للمحاضرة اثبت أن مجال الثقة للسعر St 95٪ هو محصور بين:

$S_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T-1.96\sigma\sqrt{T}}$ and $S_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T+1.96\sigma\sqrt{T}}$

الإجابة :

بالرجوع إلى التوزيع الاحتمالي للسعر نجد أن :

$$N\left\{\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right\}$$

مجال الثقة عند 95% للوغاريتم السعر $\ln S_T$ هو :

$$\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T - 1.96\sigma\sqrt{T}$$

$$\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + 1.96\sigma\sqrt{T}$$

و

وبالتالي :

$e^{\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)T - 1.96\sigma\sqrt{T}}$ and $e^{\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)T + 1.96\sigma\sqrt{T}}$

وبما أن الدالة الأسية عكس اللوغاريتم فإن:

$S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T - 1.96\sigma\sqrt{T}}$ and $S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T + 1.96\sigma\sqrt{T}}$

التمرين 5-4 :

مـــا هـــو ســـعر خيار الشراء الأوروبي على الأسهم غير الموزعة للأرباح وفقا لنموذج BMS عندما يكون سعر السهم 52 دولارًا، وسعر الممارسة 50 دولارًا، وسعر الفائـــدة بدون مخاطر 12٪ سنويًا، والتقلب هو 30٪ سنويًا، ووقت الاستحقاق هو ثلاثة أشهر؟

الإجابة : لدينا :

$S_0 = 52$, $K = 50$, $r = 0.12$, $\sigma = 0.30$, and $T = 0.25$.

$$d_1 = \frac{\ln(52/50) + (0.12 + 0.3^2/2)0.25}{0.30\sqrt{0.25}} = 0.5365$$

$$d_2 = d_1 - 0.30\sqrt{0.25} = 0.3865$$

ســـعر خـــيار الشراء الأوروبي على الأسهم غير الموزعة للأرباح وفقا لنموذج BMS هو:

$$52N(0.5365) - 50e^{-0.12\times 0.25}N(0.3865)$$
$$= 52\times 0.7042 - 50e^{-0.03}\times 0.6504$$
$$= 5.06$$

تمرين 5-5:

ما هو سعر خيار البيع الأوروبي على الأسهم غير الموزعة للأرباح وفقا لنموذج BMS عندما يكون سعر السهم هو 69 دولارًا، وسعر الممارسة هو 70 دولارًا، وسعر الفائدة بدون مخاطر هو 5٪سنويًا، والتقلب هو 35٪ سنويًا، ومدة الاستحقاق هي ستة أشهر؟

الإجابة: لدينا:

$S_0 = 69$, $K = 70$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.35$, and $T = 0.5$.

$$d_1 = \frac{\ln(69/70) + (0.05 + 0.35^2/2) \times 0.5}{0.35\sqrt{0.5}} = 0.1666$$

$$d_2 = d_1 - 0.35\sqrt{0.5} = -0.0809$$

سعر خيار البيع الأوروبي على الأسهم غير الموزعة للأرباح وفقا لنموذج BMS هو :

$$70e^{-0.05*0.5} * N(-0.0809) - 69 * N(-0.4338)$$
$$= 70e^{-0.025} \times 0.5323 - 69 \times 0.4338$$
$$= 6.40$$

أي : \$6.40

التمرين5-6 :

سعر خيار شراء على الأسهم غير الموزعة للأرباح هو \$2.50 له سعر سوقي 15 \$، سعر الممارسة هو 13 \$، ومدة الاستحقاق ثلاثة أشهر، وسعر الفائدة الخالي من المخاطر هو 5٪ سنويا.ما هو التقلب الضمني؟

الإجابة: لدينا:

$c = 2.5$ $S_0 = 15$, $K = 13$, $T = 0.25$, $r = 0.05$

نحسب التباين الضمني باستخدام نموذج BMS. بطريقة عكسية حيث :

نجرب في البداية تقلب 0.2 أو 20 ٪ سنويا يعطي قيمة خيار الشراء $c = 2.20$ وتقلب 0.3 يعطي قيمة خيار $c = 2.32$ يعني أن التقلب أكبر وبالتالي نعيد التجريبتقلب 0.4 يعطي قيمة خيار $c = 2.507$. تقلب 0.39 يعطي قيمة خيار $c = 2.487$. وبالتاليمز