جامعة الشهيد أحمد زبانة

الأستاذ: براحو

رياضيات السداسي الأول

جدع مشترك علوم اقتصادية تجارية وتسيير

الفصل الأول: مراجعة في الجبر

1- الأسس.

2- العوامل.

الفصل الثاني: المعادلات بمتغير واحد.

1- المعادلات الخطية وتطبيقاتها.

2- المعادلات التربيعية.

الفصل الثالث: المتباينات

1- المجموعات ونظرية المجموعات.

2- الفترات.

3- المتباينات الخطية بمتغير واحد.

4- المتباينات التربيعية بمتغير واحد.

5- القيم المطلقة.

الفصل الرابع: الخطوط المستقيمة وأنظمة المعادلات الخطية.

1- نظام المحاور الكارتيزية.

2- صيغة المسافة.

3- رسم المعادلات الخطية لمتغيرين.

4- الميل.

5- صيغة الميل والنقطة

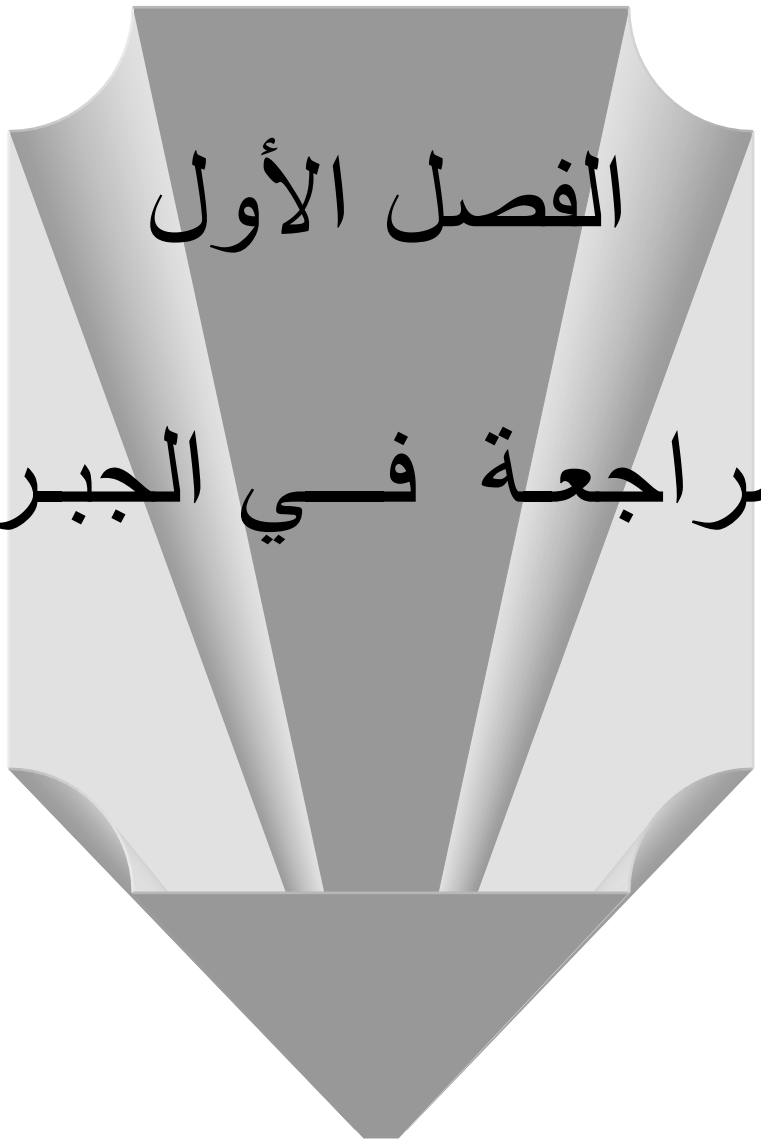
6- الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة

7- تطبيقات رسم المعادلات الخطية

8- أنظمة المعادلات الخطية لمتغيرين

9- أنظمة المعادلات الخطية لثلاث متغيرات.

02



02

الفصل الأول: مراجعة في الجبر

1- الأسس:

- إذا كان m عدد صحيح موجب فإن a^m تعرف على أنها حاصل ضرب العدد a في نفسه بمقدار m من المرات، أي: $a^m = a.a.....a$ (m من المرات)

حيث: m تمثل الأس أو القوة و a الأساس.

- خصائص الأسس:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$, $a \neq 0$
4. $(ab)^m = a^m b^m$, $ab \neq 0$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0 \text{ and } a \neq 0$

مثال1: أوجد ناتج ما يلي:

- $3^5 . 3^{-2} = 3^3 = 9$
- $x^5 . x^{-3} = x^{5-3}$
- $\frac{x^3 x^2}{x^5} = x^{3+2-5}$
- $(x^2)^5 . (x^{-2})^3 = x^{10} . x^{-6} = x^{10-6}$
- $(x^2 y^{-3})^4 = (x^2)^4 . (y^{-3})^4 = x^8 . y^{-12} = \frac{x^8}{y^{12}}$

مثال2: بسط المقدار التالي:

$$\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}\left(\frac{1}{xy}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-1}\left(\frac{1}{xy}\right)=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^{-1}\left(\frac{1}{xy}\right)=\frac{1}{x+y}$$

2- العوامل:

- إذا كان حاصل ضرب العددين a و b هو c فذلك يعني أن c= a.b وبالتالي يسمى العددان a و b بعوامل للعدد c.
- الطريقة المناسبة لكتابة المقدار بشكل حاصل ضرب عوامله تسمى بالتحليل إلى العوامل، وهي عملية معاكسة لعملية النشر.
- العلاقات المستخدمة في عملية التحليل:

1- العامل المشترك: $ax + bx = (a+b)\, x$

2- فرق بين مربعين: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

3- جمع وفرق بين مكعبين: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

4- تحليل صيغة تربيعية: إذا كان p و q ثوابت فإن:

$x^2 + px + q = (x+a)(x+b)$ then $a+b = p$ and $ab = q$

5- تحليل صيغة تربيعية: إذا كان p و q و m ثوابت غير معدومة فإن:

$mx^2 + px + q = (mx+a)(x+\frac{b}{m})$ then $a+b = p$ and $ab = mq$

<u>مثال</u>: حلل ما يلي:

$x + 3xy - z - 3zy = x(1+3y) - z(1+3y) = (1+3y)(x-z)$

$9x^2 - 25 = (3x-5)(3x+5)$

$x^2 - 5x - 6 = (x+a)(x+b)$ then $a+b = -5$ and $ab = -6$

$= (x+1)(x-6)$

$x^2 - 7x + 12 = (x+a)(x+b)$ then $a+b = -7$ and $ab = 12$

$= (x-3)(x-4)$

$3x^2 + 4x - 4 = (mx+a)(x+\frac{b}{m})$ then $a+b = 4$ and $ab = -12 \Leftrightarrow a=-2 \wedge b=6$

$= (3x-2)(x+2)$

$x^2y^2 - y^2 - x^2 + 1 = y^2(x^2-1) - x^2 + 1 = y^2(x^2-1) - (x^2-1) = (x^2-1)(y^2-1)$

$= (x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$

الفصل الثـانــي

المعادلات بمتغير واحد

الفصل الثاني: المعادلات بمتغير واحد

1-المعادلات الخطية وتطبيقاتها:

1-1- المعادلة الخطية:

المعادلة هي صيغة تعبر عن المساواة بين مقدارين جبريين، أما عن حل المعادلة الخطية بمتغير واحد هو القيمة التي تجعل المعادلة صحيحة ويسمى جذر المعادلة أو حل المعادلة.

وهناك خطوات عامة يمكن اتباعها لإيجاد حل المعادلة الخطية من الدرجة الأولى وهي كالآتي:

- التخلص من الأقواس في المعادلة.
- التخلص من الكسور وذلك بضرب طرفي المعادلة في م م أ للمقامات.
- نقل الحدود المحتوية على الثوابت إلى الطرف الأيمن من المعادلة، والحدود المحتوية على المتغير إلى الطرف الآخر، ثم تبسيط المعادلة لإيجاد الحل.

مثال1: حل المعادلة التالية: $\frac{7x}{5}-\frac{x-2}{3}=2-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3x-2}{5}\right)\Leftrightarrow x=1$

مثال2: حل المعادلة التالية: $\frac{y-2x}{D}=\frac{3(y-R)}{M}$ a)for y b)for x

1-2- تطبيقات المعادلات الخطية:

يمكن الاستفادة من مفهوم المعادلة الخطية لوصف كثير من التطبيقات، ويمكن الاستعانة بطرق حلها لحل كثير من المشاكل التطبيقية وفي جميع الحقول العلمية.

مثال1:

إذا كان الراتب الشهري بالمائة دولار لأحمد هو x ، ويحصل أخيه على 600 دولار أكثر من ضعف ما يحصل عليه أحمد.

س: فما هو الراتب الشهري لشقيق أحمد؟

ج: 2x+6

مثال2:

علي أكبر من أحمد بعشر سنوات، وقبل عشر سنوات كان عمر علي ضعف عمر أحمد.

س: فما هو عمر علي وعمر أخيه في الزمن t وفي الزمن t-10 ؟

ج:

temps	Ali	Ahmed
t	x	x-10
t-10	x-10	x-10-10

$$x-10=2(x-20)\Leftrightarrow x=30$$

مثال3:

تاجر سيارات اشترى 800 سيارة بسعر 700 دولار للسيارة الواحدة، باع منها 300 سيارة بربح 20%.

س: ما هو السعر الذي يجب عليه أن يبيع به الخمسمائة سيارة الباقية ليحقق ربحا بمعدل 28% ولجميع السيارات؟

ج: الربح من بيع 300 سيارة هو: $(20\%)(700)(300)=42000\,dollars$

بافتراض أن سعر بيع الـ 500 سيارة الباقية هو x دولار، فإن ربحه لبيع جميع السيارات ال500 سيكون:

$$500(x-700)dollars$$

وبالتالي فإن مجموع الربح لـ 800 سيارة هو $42000+500(x-700)dollars$

وبما أن الربح يجب أن يكون 28% من سعر الشراء لجميع السيارات الـ 800، فإن هذا الربح سيساوي:

$$(28\%)(700)(800)=156800\,dollars$$

وبالتالي فتحديد سعر بيع السيارات المتبقية لتحقيق الربح المطلوب هو حل المعادلة التالية:

$$42000+500(x-700)=156800 \Leftrightarrow x=929.6$$

ويعني ذلك أن سعر البيع هو 929.6 دولار لكل سيارة من السيارات الـ 500 الباقية.

مثال4:

يملك شخص ما 50000 دولار معدة للاستثمار، ويرغب أن يحصل سنويا على 4000 دولار من هذا المبلغ. وهو يستطيع أن يستثمر بنسبة 7% مع أصدقائه أو يستثمر مع شركة والتي هي أكثر خطورة بنسبة 10%.

س: كيف يقسم هذا الشخص المبلغ للاستثمار على النسب ليحقق الربح 4000 دولار سنويا وفي نفس الوقت يقلل الخسارة إلى أقل ما يمكن؟

ج: x يمثل المبلغ المستثمر مع الأصدقاء، و 50000-x هو المبلغ المستثمر مع الشركة، وبالتالي المبلغ الذي سوف يستلمه المستثمر من الاستثمار مع المصدرين هو:

$$0.07x+0.01(50000-x)=4000\,dollars \Leftrightarrow x=33333,33\,dollars$$

ملاحظة: في حالة الرغبة في زيادة الدخل يجب أن يزيد من المبلغ المستثمر مع الشركة الأكثر خطورة.

2- المعادلات التربيعية:

المعادلة التربيعية لمتغير واحد هي المعادلة التي يمكن كتابتها بالصيغة العامة التالية: $ax^2+bx+c=0\ ,(a\neq 0)$

وهناك طرق عديدة لحل المعادلات التربيعية وسوف نتناول أربع طرق منها:

أ- الحل بواسطة الجذر التربيعي: وذلك بالرجوع لمعنى الجذر التربيعي،

مثال: $2x^2-6=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\mp\sqrt{3}$

ب- الحل بطريقة التجزئة إلى العوامل: تعتمد هذه الطريقة على خاصية التحليل.

مثال:

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ or } x=-1$$

جـ- الحل بطريقة المميز:

تعتبر من أكثر الطرق استخداما، وبالرجوع إلى الصيغة العامة للمعادلات التربيعية $(a\neq0)\ ,\ ax^2+bx+c=0$ فإن تطبيق الصيغة التربيعية أو ما يسمى بطريقة المميز يكون كالآتي: $x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

مثال: حل المعادلة التربيعية التالية بطريقة الصيغة التربيعية: $x^2 - 2x - 1 = 0$

د- الحل بطريقة إكمال المربع:

تعتبر طريقة إكمال المربع من الطرق المهمة لحل المعادلات التربيعية، وتستند هذه الطريقة على تحويل الشكل العام للمعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ إلى $(X+A)^2 = B$

مثال1: نفترض لدينا: $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 1$

بعد ذلك نحاول إيجاد العدد الحقيقي الذي يمكن إضافته لطرفي المعادلة ويجعل الطرف الأيسر مربعا كاملا، والقاعدة:

- عندما يكون معامل x^2 هو 1 نقوم بقسمة معامل x على 2 ثم نربع ذلك المقدار.
- أما عندما يكون معامل x^2 لا يساوي 1 فنقسم جميع أطراف المعادلة على هذا المعامل، ثم نتبع الخطوة السابقة.

وبالرجوع للمعادلة في هذا المثال لدينا: $x^2 - 2x = 1$ أي أن معامل x هو -2

ولذلك سنقوم بإضافة الحد: $\left(\frac{-2}{2}\right)^2=1$ ، فنحصل على: $x^2 - 2x +1 = 1+1$ ، ومنه:

$$(x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x-1=\mp\sqrt{2} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{2} \vee x=1+\sqrt{2}$$

مثال2: حل المعادلة التربيعية التالية بطريقة إكمال المربع: $2x^2 - 8x +3 = 0$

$$2x^2 - 8x = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = \frac{-3}{2} + \left(\frac{-4}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x-2)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x-2=\mp\sqrt{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \vee x=2+\sqrt{\frac{5}{2}}$$

الفصل الثـالث

المتبـاينـات

الفصل الثالث: المتباينات

1-المجموعات ونظرية المجموعات:

المجموعة هي تجمع من المفردات يفترض أن يكون لها صفة أو صفات مشتركة، ومن بين الأمثلة المناسبة لتعريف وكتابة مجموعات الأعداد ما يلي:

مثال1: أكتب مجموعة الأعداد الطبيعية: $N=\{1,2,3.\ldots\ldots\ldots\}$

مثال2: أكتب مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين العددين 2 و7:

لكتابة هذه المجموعة علينا تمييز أربعة حالات مختلفة كالآتي:

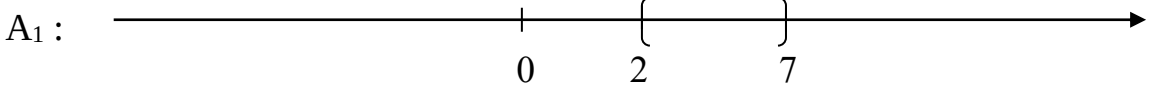
$A=\{2,3,4,5,6,7\}$
$B=\{3,4,5,6\}$
$C=\{2,3,4,5,6\}$
$D=\{3,4,5,6,7\}$

مثال3: أكتب مجموعة الأعداد الحقيقية وأرسمها المحصورة بين العددين 2 و7:

لكتابة هذه المجموعة علينا تمييز أربعة حالات مختلفة كالآتي:

$A_1=\{x/2\leq x\leq 7, x\in\Re\}$
$A_2=\{x/2\langle x\langle 7, x\in\Re\}$
$A_3=\{x/2\leq x\langle 7, x\in\Re\}$
$A_4=\{x/2\langle x\leq 7, x\in\Re\}$

أما عن رسم هذه المجموعات فلدينا على سبيل المثال:



مثال4: لنفترض أن U تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية U= R، وأن:

$A=\{x/1\leq x\leq 2\}$
$B=\{x/1,5\leq x\langle 3\}$
$C=\{x/1\leq x\leq 4\}$
$D=\{x/x\geq 4\}$

س: حدد العلاقات وأوجد المجموعات التي يمكن الحصول عليها من المجموعات أعلاه؟

ج: نلاحظ أن $A\subset C$ وهذا يعني أن $A\cup C=C$ و $A\cap C=A$ ونلاحظ أيضا أن $A\cap D=\phi$ وهذا يعني أن A,D متنافيان وكذلك لدينا ما يلي من العلاقات:

$A\cap B=\{x/1,5\leq x\leq 2\}$
$A\cup B=\{x/1\leq x\langle 3\}$
$C\cap D=\{x/x=4\}=\{4\}$
$C\cup D=\{x/1\leq x\langle \alpha\}$
$A\cup D=\{x/1\leq x\leq 2\}\cup\{x/x\geq 4\}$

$$A^{complement} = \{x/-\alpha\langle x\langle 1\}\cup\{x/2\langle x\langle\alpha\}$$

$$B^c = \{x/-\alpha\langle x\langle 1{,}5\}\cup\{x/\ 3\le x\langle\alpha\}$$

$$C^c = \{x/\ -\alpha\langle x\langle 1\}\cup\{x/\ 4\langle x\langle\alpha\}$$

$$D^c = \{x/x\langle 4\}$$

2-الفترات:

ليكن العددان الحقيقيان a وb بحيث a<b ، حيث نميز أربع أنواع من الفترات:

$$]a,b[=\{x/a\langle x\langle b, x\in\Re\}$$
$$[a,b]=\{x/a\le x\le b, x\in\Re\}$$
$$[a,b[=\{x/a\le x\langle b, x\in\Re\}$$
$$]a,b]=\{x/a\langle x\le b, x\in\Re\}$$

حيث الحدان a وb يعرفان على أنهما حدا الفترة، ويلاحظ مدى التشابه الكبير بين قراءة ورسم الفترات وتعريف المجموعات كما تم سابقا.

ملاحظة: يجب الإشارة إلى أن هناك بعض الفترات الغير محدودة، ومن أشكالها: $]a,\alpha[$ ، $[a,\alpha[$ ، $]-\alpha,b]$ ، $]-\alpha,b[$.

مثال: أكتب ما يلي بشكل فترات، ثم أرسمها: أ) $3\le x\le 10$ ب) $x\rangle -6$

3-المتباينات الخطية بمتغير واحد:

3-1- الشكل العام للمتباينة بمتغير واحد:

إن الشكل العام للمتباينة بمتغير واحد هو أحد الحالات التالية:

$$ax+b\langle 0 \quad \text{or} \quad ax+b\rangle 0$$
$$ax+b\le 0 \quad \text{or} \quad ax+b\ge 0$$

وكما تم تعريف حل المعادلة الخطية، يتم تعريف حل المتباينة الخطية بأحد الأشكال التالية:

$$x\langle -\frac{b}{a} \quad \text{or} \quad x\rangle -\frac{b}{a}$$
$$x\le -\frac{b}{a} \quad \text{or} \quad x\ge -\frac{b}{a}$$

مثال: أوجد حل المتباينات التالية: $5-2x\langle 7$ ، $3-x\le 2x+4$

3-2- المتباينة المزدوجة:

أ- الحالة الأولى: $5\langle 2x+7\langle 13$

في هذه المتباينة المزدوجة يظهر المتغير x في وسط الشكل وبالتالي يتم حل المتباينتين الناتجتين معا بطرح العدد 7 من جميع أطراف المتباينة، ثم القسمة على 2 فنحصل على: $-1\langle x\langle 3$

ب- الحالة الثانية: $3x+1\langle 3-x\langle 2x+5$

لحل هذا النوع من المتباينات المزدوجة علينا أولا قراءتها على شكل متباينتين كالآتي:

$$3x+1\langle 3-x \quad \text{and} \quad 3-x\langle 2x+5$$

ثم نقوم بحل كل منها على حدى، فنجد: $-\frac{2}{3}\langle x\langle\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x\langle\frac{1}{2} \quad \wedge \quad x\rangle-\frac{2}{3}$

3-3- تطبيقات المتباينات:

كثيرا من هذه التطبيقات تخص تحديد الأرباح، الاستثمار، وكذا اتخاذ القرارات بشأن الإنتاجية.

مثال1: يستطيع أحد رجال الأعمال استثمار 7000 دينارا بحيث يضع قسم منه بمعدل ربح 7% والباقي بمعدل10%.

س: ما هي الكمية القصوى التي يجب عليه أن يستثمرها بالمعدل 7% لتحقيق على الأقل 500 دينار كربح سنوي؟

ج: لنفرض أن الكمية التي سيضعها بمعدل ربح 7% هي x، وبالتالي فإن الكمية التي سيضعها بمعدل ربح 10% هي (7000-x). ولتحقيق ربحا على الأقل 500 دينار لدينا المتباينة التالية:

$$7\%x+10\%(7000-x)\geq 500 \quad \text{وبالتالي فإن:} \quad x\leq 6666.666$$

ومعناه أن رجل الأعمال يمكن أن يضع 6666.666 دينارا كحد أقصى بالمعدل 7% لتحقيق الربح المعين.

مثال2: يود مدير مصنع اتخاذ قرار بشأن التصنيع من عدمه لأحد الأجهزة الواجب تهيئتها لإدارة مصنعه، فإذا أراد شراء هذا الجهاز من الخارج فإن تكلفة الجهاز الواحد 1,5 دينار، أما إذا أراد تصنيعه في المصنع فإنه سيزيد من الكلفة الكلية بالمقدار 500 دينار شهريا.

س: علما أن تكلفة الجهاز الواحد هي 1 دينار، فما هو عدد الأجهزة التي عليه تهيئتها شهريا ليستطيع اتخاذ القرار بشأن تصنيع الأجهزة داخل المصنع؟

ج: لأجل اتخاذ القرار بشأن التصنيع داخل المصنع يجب أن تكون كلفة الشراء أكبر من كلفة التصنيع كالآتي:

$$1,5x\rangle x+500 \quad \Leftrightarrow \quad x\rangle 1000$$

لذلك فإن احتاج المصنع على الأقل 1000 جهاز شهريا على صاحب المصنع تصنيعها في الداخل.

4- المتباينات التربيعية بمتغير واحد:

وكما تم تعريف المعادلة التربيعية لمتغير واحد، سابقا بالشكل العام التالي:$(a\neq 0)$, $ax^2+bx+c=0$ يمكن تعريف المتباينة التربيعية بمتغير واحد بأحد الأشكال التالية:

$$ax^2+bx+c\rangle 0 \text{ , where } a\neq 0,(a,b,c)\in\Re^3$$

$$ax^2+bx+c\geq 0 \text{ , where } a\neq 0,(a,b,c)\in\Re^3$$

وبنفس الأسلوب يتم حل المتباينات التربيعية، كما هو مبين في الأمثلة التالية:

مثال1: حل المتباينة التالية: $x^2+3x\rangle 0$

ج: نحل المتباينة أولا عن طريق تحويلها إلى معادلة لنحصل على: $x^2+3x\rangle 0\Leftrightarrow x(x+3)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=-3$ وبعد رسم النقطتين على خط الأعداد الحقيقية، ثم تحديد الإشارات لكل من x و x+3 فإن الحل الذي يحقق $x^2+3x\rangle 0$ هو: $x\rangle 0$ أو $x\langle -3$.

مثال2: حل المتباينة التربيعية التالية: $x^2+3x-4\leq 0$

ج: بنفس الأسلوب المتبع في المثال السابق، نحول المتباينة إلى معادلة كالآتي: $x^2+3x-4=0$ ، وباستخدام أسلوب التحليل إلى العوامل نحصل على: $(x+4)(x-1)=0\Leftrightarrow x=-4\vee x=1$

بعد رسم النقطتين على خط الأعداد الحقيقية، ثم تحديد الإشارات لكل من $x+4$ و $x-1$ فإن حل المتباينة التربيعية سيكون عندما: $-4\le x\le 1$

5- القيم المطلقة:

أ- تعريف: إذا كان $x\in\Re$ فإن القيمة المطلقة لـ x:

$$|x|=\begin{cases} x & \text{if } x\ge 0 \\ -x & \text{if } x<0 \end{cases}$$

وبالتالي فإنه من الواضح أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هو عدد حقيقي موجب $(|x|\ge 0)$

ب- علاقات خاصة بالقيمة المطلقة:

1) if $|a|=b$, where $b\ge 0$ then either $a=b$ or $a=-b$
2) if $|a|=|b|$, then either $a=b$ or $a=-b$
3) $|x|=|-x|=\sqrt{x^2}$
4) $|x|<a$ if and only if $-a<x<a$
5) $|x|>a$ if and only if either $x>a$ or $x<-a$
6) $|ab|=|a||b|$
7) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, $b\ne 0$

مثال1: أوجد قيمة x لكل مما يأتي:

$|2x-4|=6 \Leftrightarrow 2x-4=6$ or $2x-4=-6\Leftrightarrow x=5$ or $x=-1$

$|2x+5|=|3x-1| \Leftrightarrow 2x+5=3x-1$ or $2x+5=-(3x-1)\Leftrightarrow x=4$ or $x=\frac{-4}{5}$

مثال2: أوجد قيمة x التي تحقق المتباينات التالية:

$|3x-4|<5 \Leftrightarrow -5<3x-4<5 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<3$

$|3x-4|>7 \Leftrightarrow 3x-4>7$ or $3x-4<-7 \Leftrightarrow x>\frac{11}{3}$ or $x<-1$

$\left|\frac{2x-3}{7}\right|\ge 1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{7}\ge 1$ or $\frac{2x-3}{7}\le -1 \Leftrightarrow x\ge 5$ or $x\le -2$

مثال3: عبر عن ما يلي باستخدام القيمة المطلقة: يبعد xعن العدد 5 بوحدتين

ج: $|x-5|=2$

14

الفصل الرابع

الخطوط المستقيمة وأنظمة المعادلات الخطية

14

الفصل الرابع: الخطوط المستقيمة وأنظمة المعادلات الخطية.

1- نظام المحاور الكارتيزية:

الخط الكارتيزي هو خط من الأعداد الحقيقية والمتمثل بنقطة الأصل واتجاه موجب ووحدة قياس، أما عندما يكون لدينا محورين متعامدين يتقاطعان عند نقطة الأصل (0,0) عندئذ يمثل تمثيل النقاط في مستوي والذي يسمى نظام المحاور الكارتيزية. أما عن مقاييس الرسم فلا تحتاج أن تكون نفسها.

2- صيغة المسافة:

وهي إحدى استخدامات المحاور الكارتيزية، حيث حسب نظرية بيشكورن « Pythagorean » فإن المسافة d بين نقطتين إحداثياتها على الترتيب (x_1,y_1)، (x_2,y_2) هي:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مثال1: أوجد المسافة بين النقطتين A(4,3) و النقطة B(1,5)

ج:
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1-4)^2+(5-3)^2}=\sqrt{13}$$

مثال2: أربعة مدن A(0,0)، B(150,0)، C(200,100) و D(50,150) ، يراد ربط المدينتين B وD بطريقين سريعين. الطريق **الأول:** ينطلق من المدينة B إلى D من خلال المدينة A (طريق ساحلي)، أما الطريق **الثاني:** ينطلق من المدينة B إلى D من خلال المدينة C (طريق جبلي).

رغب أحد السائقين الذهاب من المدينة B إلى المدينة D بمعدل سرعة 100 كم/سا باستخدام الطريق الأول، وبمعدل سرعة 60 كم/سا باستخدام الطريق الثاني.

س: ما هو الطريق الذي يسلكه للوصول بوقت أقل؟

ج: لتحديد الطريق الذي سيستغرق وقتا أقصر، علينا حساب الوقت اللازم لقطع الطريق **الأول** ومقارنته بالوقت اللازم لقطع الطريق **الثاني**.

$$T_1=\frac{d_1}{v_1}=\frac{\sqrt{(150-0)^2+(0-0)^2}+\sqrt{(50-0)^2+(150-0)^2}}{100}=\frac{308,11388}{100}=3,08h$$

$$T_2=\frac{d_2}{v_2}=\frac{\sqrt{(200-150)^2+(100-0)^2}+\sqrt{(50-200)^2+(150-100)^2}}{100}=\frac{270}{60}=4,5h$$

وبمقارنة الفترتين الزمنيتين نقول بأن على السائق أن يسلك الطريق1 بالوقت 3.08 ساعة وهو الوقت الأفضل والأقل.

3- رسم المعادلات الخطية لمتغيرين:

المعادلة الخطية لمتغيرين هي المعادلة التي يمكن أن تكتب بالشكل أو الصيغة التالية: $Ax + By = C$ حيث أن a,b,c ثوابت حقيقية وa,b غير معدومين معا.، وتسمى هذه الصيغة بالصيغة القياسية.، على سبيل المثال لدينا المعادلات التالية: $5x-4y=10$ ، $y=2x-1$ ، $y=-8$ ، $x=3$.

وإن رسم المعادلة لمتغيرين يعني رسم مجموعة الحل (التي هي على شكل خط مستقيم) على المستوى الكارتيزي « Cartesian plane » ، وكذلك في حالة $B\neq0$ يمكن كتابة المعادلة الخطية بمتغيرين بالصيغة التالية: $y=mx+b$ حيث أن m يمثل الميل، وأن b يمثل الثابت.

والرسم يمكن أن يتم باستخدام أي من الصيغتين، حيث أننا نقوم برسم أي نقطتين من مجموعة الحل ثم نصل النقطتين بخط ليمثل رسم الخط المستقيم.

مثال: أرسم المعادلة التالية: $y = 3x + 1$ ، $-5x + 2y = 11$

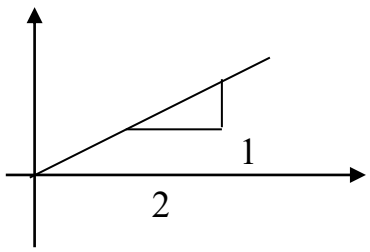
4- الميل:

يعتبر الميل « Slope » للخط المستقيم من الخصائص المهمة للمعادلة الخطية ومقياس رقمي مفيد جدا لقياس انحدار الخط المستقيم، ولهذا فإن فكرة الميل استخدمت بشكل واسع لهذه الغاية. والميل الذي يرمز له بـ m للخط المستقيم المار بنقطتين (x_1,y_1) و (x_2,y_2) يمكن إيجاده من خلال الصيغة التالية: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

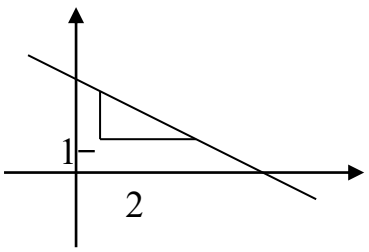
ملاحظة: الميل للخط المستقيم الأفقي يساوي 0، أما الميل للخط المستقيم العمودي فهو غير معرف.

مثال1: أوجد الميل للخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين: (7-,4) و (5,2-)

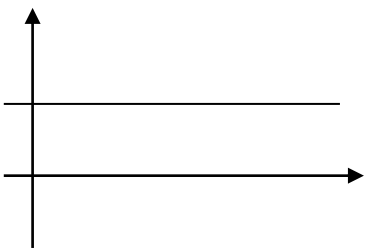
مثال2: أوجد الميل للخط المستقيم الذي معادلته: $15-y = 7x$



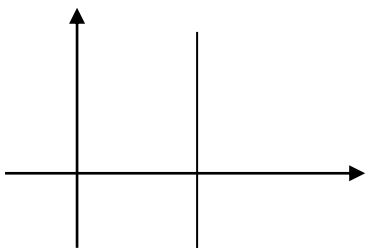
ميل المستقيم موجب



ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم معدوم



ميل المستقيم غير معرف

5- صيغة الميل والنقطة:

لنفرض أن المستقيم الذي ميله m يمر بنقطة ثابتة (x_1,y_1)، ولو كانت (x,y) هي أي نقطة أخرى يمر خلالها هذا المستقيم، فإن الميل m هو: $m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Leftrightarrow y-y_1=m\left(x-x_1\right)$

وهذه الصيغة تسمى معادلة الميل والنقطة للخط المستقيم.

مثال1: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة (-4,4) والميل $\frac{1}{4}$ وأكتبها بالشكل النهائي: Ax + By = C ؟

ج: باستخدام الصيغة:

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right) \Leftrightarrow y-4=\frac{1}{4}(x-(-4)) \Leftrightarrow y-\frac{1}{4}x=5$$

مثال2: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (-4,4) و(-3,3) ؟

ج: علينا أولا إيجاد ميل المستقيم المار خلال النقطتين: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-4}{-3-(-4)}=-1$ ،

وباستخدام هذا الميل m=-1 وأي من النقطتين نوجد معادلة المستقيم حسب طريقة المثال السابق.

مثال3: إذا علمت أن المعادلة الخطية هي $4y+6x=12$ ، أوجد الميل m ومعامل تقاطع y لرسم المعادلة؟

ج: $4y+6x=12 \Leftrightarrow y=3-\frac{3}{2}x$ وبالتالي فإن $m=-\frac{3}{2}$ وان معامل التقاطع y هو b=3 .

6- الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة:

معنى أن يكون الخطان المستقيمان متوازيان هو أن يكون ميلهما متساوي $(m_1 = m_2)$ ، أما أن يكون الخطان متعامدان هو أن يكون حاصل ضرب ميلهما يساوي −1 $(m_1m_2 = -1)$ ، وبالتالي نستطيع من خلال هاتين العلاقتين تحديد ميل أحد المستقيمات إذا علمنا أنه موازي أو متعامد مع مستقيم آخر معلوم الميل وغيرها من التطبيقات التي تعتمد على هذا المعنى.

مثال1: لتكن $x-2y=4$ معادلة الخط المستقيم، أوجد معادلة الخطان المستقيمان اللذان يمران بالنقطة (-3,2) ويكون أحدهما موازي والآخر متعامد مع الخط المستقيم المعلوم؟

ج: كأول خطوة نوجد ميل المستقيم المعلوم وذلك بتحويله إلى الصيغة العامة: $y=mx+b$ ونحصل على:

$x-2y=4\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-2$ ويعني هذا أن ميل الخط المستقيم المعلوم هو $m=\frac{1}{2}$.

فإن ميل الخط الموازي للخط المستقيم المعلوم تساوي أيضا $\frac{1}{2}$ وبما أنه يمر بالنقطة (2,-3) لذلك فإن معادلته يمكن إيجادها كما يلي: $y-y_1=m\left(x-x_1\right)\Leftrightarrow y-(-3)=\frac{1}{2}(x-2)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-4$

أما ميل الخط المتعامد مع الخط المستقيم المعلوم تساوي أيضا $m_2=\frac{-1}{m_1}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$ وبما أنه يمر بالنقطة (2,-3) لذلك فإن معادلته يمكن إيجادها كما يلي:

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)\Leftrightarrow y-(-3)=-2(x-3)\Leftrightarrow y=-2x+3$$

مثال2: حدد إن كانت أزواج المستقيمات التالية متوازية أو متعامدة أم غير ذلك؟

a) $2x+3y=6$ and $3x-2y=6$
b) $2y+4x+1=0$ and $y-2+2x=0$

ج: كأول خطوة نقوم بتحديد ميل كل مستقيم ثم نقارن بينهما.

7- تطبيقات رسم المعادلات الخطية:

مثال1: أرسم معادلة الخط المستقيم التالية: $2x-3y=6$

ج: نستخدم نقط مساعدة.

مثال2: أوجد معادلة الكلفة C لنموذج العلاقة الخطية إذا كانت الكلفة الثابتة هي 400$ لليوم الواحد وكلفة إنتاج 20 وحدة من المنتج هي 600$

ج: المعادلة الخطية هي: $c=mx+b\Leftrightarrow 600=m20+400\Leftrightarrow m=10$

ومنه: $c=10x+400$

مثال3: تاجر للسيارات يستطيع أن يبيع 10 سيارات في اليوم الواحد بسعر 5000$ للسيارة الواحدة ولكنه يستطيع أن يبيع 15 سيارة في اليوم إذا كان السعر 4500$ للسيارة الواحدة.

س: حدد معادلة الطلب وافترض أنها معادلة خطية.

ج: لنفرض أن x يمثل كمية الطلب، و أما السعر p فيمثل المحور العمودي، وبما أن معادلة الطلب هي معادلة خطية فإن هذه المعادلة هي معادلة خط مستقيم يمر بالنقطتين (10,5000) و(15,4500)

وعليه: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4500-5000}{15-10}=-100$

وباستخدام صيغة الميل m=-100 والنقطة (10,5000) نستطيع إيجاد العلاقة الخطية كالآتي:

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)\Leftrightarrow p-5000=-100(x-10)\Leftrightarrow p=-100x+6000$$

8- أنظمة المعادلات الخطية لمتغيرين:

8-1- تعريف:

هناك العديد من المشاكل في الاقتصاد والمالية والإدارة تقود إلى ما يعرف بأنظمة المعادلات الخطية، والمطلوب هو حل هذه الأنظمة والتوصل إلى النتائج.

ندرس هنا حالة أكثر من معادلة خطية ولنفس المتغيرات، ويراد منها الحصول على قيم المتغيرات، فمثلا النظام الذي يحتوي على معادلتين خطيتين هو النظام الذي له الشكل العام التالي:

$$\begin{cases} A_1X+B_1Y=C_1 \\ A_2X+B_2Y=C_2 \end{cases}$$

حيث أن A_1، A_2 و B_1، B_2 و C_1، C_2 جميعها ثوابت حقيقية.

8-2- طرق حل أنظمة المعادلات الخطية بمتغيرين:

أما عن طرق حل أنظمة المعادلات الخطية بمتغيرين فهي طريقة الرسم، طريقة الحذف، طريقة التعويض، وسيتم التعرف على هذه الطرق المختلفة وكيفية استخدامها لحل الأمثلة التطبيقية التالية:

مثال1: إذا كانت كلفة 2 قميص للكبار وقميص واحد للأطفال هي 9$ ، وكانت كلفة قميص واحد للكبار و3 قمصان للأطفال هي 12$، فما هو سعر كل قميص؟

ج: لحل هذه المسألة يكفي حل نظام المعادلتين التالي: $\begin{cases} 2x+y=9 \\ x+3y=12 \end{cases}$

- **طريقة الرسم:** نقوم برسم المعادلتين، حيث وجدنا أن النقطة (3,3) هي التي يتقاطع فيها الخطان المستقيمان للمعادلتين، وبالتالي فهي حل النظام، أي أن سعر قميص الكبار 3$ وسعر قميص الأطفال هو 3$.
- **طريقة الحذف:** يتم بضرب إحدى المعادلتين في عدد ثم القيام بعملية الجمع لحذف إحدى المتغيرتين ونحص ب>لك على معادلة ذات متغير واحد يتم حسابه، ثم نعيد نفس العملية بحذف المتغير الآخر.
- **طريقة التعويض:**استخراج قيمة x من إحدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الثانية لأجل حساب المتغير y ، نكرر نفس العملية باستخراج قيمة y من معادلة وتعويضها في الأخرى لأجل حساب x.

مثال2: أحد أصحاب معارض السيارات رغب بتوسيع عمله لشراء نوعين من السيارات الحديثة أحدهما صغيرة الحجم وكل سيارة تكلف 3000$، والنوع الثاني كبيرة الحجم وكل سيارة تكلف 4000$.

السيارة من النوع الصغير تستغل مساحة من المعرض مقدارها 4م^2 أما السيارة من النوع الكبير فتستغل مساحة مقدارها 5م^2 من المعرض. فإذا كان المالك يملك فقط 200000$ لهذه الصفقة ولديه مساحة مقدارها 400م^2 في المعرض الخاص بالسيارات.

س: ما العدد المطلوب شراءه من كل نوع لاستخدام المبالغ والمساحة المتوفران أفضل استغلال؟

ج: لحل هذه المسألة يكفي حل نظام المعادلتين التالي:

$$\begin{cases} 3000x+4000y=200000 \\ 4x+5y=400 \end{cases}$$

9- أنظمة المعادلات الخطية لثلاث متغيرات:

أ- تعريف: بعد أن تم التعرف على نظام المعادلات الخطية لمتغيرين يمكن تعميم كتابة النموذج وحل الأنظمة لأكثر من متغيرين. فمثلا الحديث عن الأنظمة الخطية لثلاث متغيرات يكتب بالشكل العام التالي:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+b_1z=k_1 \\ a_2x+b_2y+b_2z=k_2 \\ a_3x+b_3y+b_3z=k_3 \end{cases}$$

- **طريقة الحذف:** نستخدم المعادلتين الناتجتين من خطوتي الحذف 1 و 2 لتكوين نظام من المعادلات الخطية بمتغيرين. ونقوم بحل هذا النظام باتباع الطرق السابقة.
- **طريقة التعويض:**استخراج قيمة x من المعادلة (1) وتعويضها في المعادلتين 2، 3 لتكوين نظام من المعادلات الخطية بمتغيرين. ونقوم بحل هذا النظام باتباع الطرق السابقة.

مثال: حل نظام المعادلات الخطية التالي:

$$\begin{cases} x+3y-z=4 \\ 2x+y+2z=10 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$$

21

مسائـل وتمـاريـن للحل

21

سلسلة تمارين خاصة بالفصلين الأول والثاني:

التمرين الأول (الأسس): أوجد ناتج ما يلي:

$$(2^3)^5.(2^5)^2 \quad , \quad (x\,y^{-3})^{-1} \quad , \quad \left(x\,y^2z^2\right)^{-1}(xyz)^3 \quad , \quad \frac{\left(-y^{-2}\right)^{-3}}{\left(-y^{-1}\right)^{-2}}$$

التمرين الثاني (العوامل): حلل المقادير التالية:

$$3x^2y+6x \quad , \quad x^2y^2-9 \quad , \quad x^2-5x+6$$

$$x^2+6x+9 \quad , \quad 2x^2-8x+8 \quad , \quad 6x^2-x-12 \quad , \quad x^3-8y^3$$

التمرين الثالث: حل المعادلات التالية:

$$3x-2+4(1-x)=5(1-2x)-12$$

$$\frac{1}{3}(2x+1)+\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}(1-2x)-4$$

$$\frac{2}{z}+\frac{3}{zt}=1 \quad \text{a) for } z \quad , \quad \text{b) for } t$$

$$z=\frac{x-ty}{1-t} \quad \text{a) for } y \quad , \quad \text{b) for } t$$

التمرين الرابع (المعادلات الخطية): قبل خمس سنوات، عمر أحمد كان ضعف عمر علي.

س: أوجد عمر أحمد الآن إذا كان مجموع عمرهما اليوم يساوي 43 سنة ؟

التمرين الخامس (المعادلات الخطية):

استثمر علي مبلغ بنسبة 10% والذي يمثل ضعفين ما استثمره بنسبة 7% ، ومجموع ما حصل عليه علي لسنة كاملة من الاستثمارين هو 1200 $.

س: ما هو المبلغ المستثمر لكل نسبة من النسب ؟

التمرين السادس (المعادلات الخطية):

استثمر محمد مبلغ 1600$ لنسبة 10% اكثر من نسبة 15%، ومجموع ما حصل عليه لسنة واحدة من الاستثمار هو 180$.

س: ما هو المبلغ الذي استثمر لكل نسبة من النسب؟

التمرين السابع: حل المعادلات التربيعية التالية بثلاثة طرق:

$$2x^2-6x-2=0 \quad , 4x^2-8x=3 \quad , (x+3)(x-3)=x-9$$

$$3x^2=12x-4 \quad , (x+1)^2=2(x-1)^2$$

سلسلة تمارين خاصة بالفصل الثالث:

التمرين الأول: حل المتباينات الخطية التالية:

$$3-2x\geq 7\ ,\ 31-3y<5y+7,\ 2(3x-1)>2+5(x-1)\ ,\ \frac{x+1}{2}-\frac{x}{3}>1+\frac{2x-1}{5}\ ,\ \frac{4x-10}{x-2}>3$$

التمرين الثاني: حل المتباينات المزدوجة التالية:

$$7<2x+5<13\ ,\ -4<x-2<4,\ 6x-11<3x+1<5x-7$$

$$2x>x+1>3x-5\ ,\ 9\leq 4-6x<12,\ 1\leq\frac{1-3x}{4}\leq 4$$

التمرين الثالث: حل المتباينات التربيعية التالية:

$$x^2-3x>10,\ (x+2)(x+3)>(x-2)^2\ ,\ (3x+1)(x-2)<(x-4)(3x+3)$$

التمرين الرابع (المتباينات الخطية):

مصنع لصناعة السيارات يرغب في اتخاذ القرار بشأن تصنيع قطع معينة يحتاج إليها في صنع السيارات والتي كان يشتريها من مصنع آخر بسعر 3دينار للقطعة الواحدة، تصنيع هذه القطع سيزيد من الكلفة الثابتة للمصنع أسبوعيا 1000دينارا مضافا على كلفة صنع الوحدة الواحدة بمقدار 1,90 دينار.

س: أوجد عدد القطع التي يحتاجها المصنع أسبوعيا لاتخاذ القرار بشأن تصنيعها داخل المصنع؟

التمرين الخامس (المتباينات الخطية):

شركة تستطيع بيع كل ما تنتجه من وحدات مصنعة بسعر 200 دينار للوحدة الواحدة. التكلفة الشهرية الثابتة للشركة هي 30000 دينار وكلفة تصنيع الوحدة الواحدة هي 130 دينار.

س: أوجد عدد القطع الواجب تصنيعها وبيعها شهريا لتحقيق ربح شهري على الأقل 2500 دينار؟

التمرين السادس (القيم المطلقة): أوجد قيمة x لكل مما يأتي:

$$|x-5|=2\ ,\ |4x-3|=|3x+5|,\ |x-2|<3,\ |x+5|\geq 2,\ \frac{1}{|3x-5|}<2$$

$$|6x-7|=|3+2x|,\ \left|\frac{x+5}{2-x}\right|=6\ ,\ |x+6|<3\ ,\ |2x-3|\leq 6,\ \left|\frac{2-5x}{4}\right|\geq 3$$

سلسلة تمارين خاصة بالفصل الرابع:

التمرين الأول (الميل): أوجد الميل لكل من المستقيمات التي تربط أزواج النقاط التالية:

- (4,6) and (1,2)
- (4,-3) and (1,-5)
- (3,0) and (5,0)

التمرين الثاني (معادلة الخط المستقيم): أوجد معادلة الخط المستقيم لكل مما يلي:

1) يمر بالنقطة (3،2) والميل 4 (passing through (3,2) with slope 4)

2) يمر بالنقطة (5،6) والميل 0 (Passing through (5,6) with zero slope)

التمرين الثالث (معامل التقاطع): أوجد معامل التقاطع للمتغير y للمعادلات الخطية التالية:

- $4y-6x=12$
- $4x+8=0$
- $5y-7=0$
- $\frac{y}{6}+\frac{x}{8}=2$

التمرين الرابع (تطبيقات رسم المعادلات الخطية):

تاجر للسيارات يستطيع أن يبيع 10 سيارات في اليوم الواحد بسعر 5000$ للسيارة الواحدة ولكنه يستطيع أن يبيع 15 سيارة في اليوم إذا كان السعر 4500$ للسيارة الواحدة.

س: حدد معادلة الطلب وافترض أنها معادلة خطية؟

التمرين الخامس (الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة):

حدد فيما إذا كانت أزواج الخطوط المستقيمة التالية هي خطية متوازية أو متعامدة أو غير ذلك:

- $4x-6y=12$ and $6x+4y=12$
- $2x=2y$ and $2x+2y=4$
- $4x=-y-6$ and $y=-2x-4$
- $x=-4-6y$ and $4y+6x=10$
- $x-3=0$ and $4-x=0$
- $6x+8y=2$ and $6x-8y=2$

التمرين السادس (**أنظمة المعادلات الخطية**): حل أنظمة المعادلات الخطية التالية:

- $2y - 4x = 1$ and $5y - 10x = \frac{5}{2}$
- $3y - x = 2$ and $y + 2x = 10$
- $-10y + 2x = 8$ and $20y - 4x = -16$
- $3y - 6x = -9$ and $-2y + 4x = 12$
- $5x - 4y - 2z = -2$ and $3x - 2y + 5z = 19$ and $2x - 3y + 3z = -15$
- $4x + 2y - z = -9$ and $x - 3z = -6$ and $2x + z = -5$
- $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \\ -x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

26

المراجـع

1. Tan S. T. « Applied Finite Mathematics », 2nd ed. Pws-Kent publishing company 1987.
2. Anton, Harward « Calculus », 6th ed. New York: Wiley & Son, Inc. 1999.
3. Arya Y.C. and R.W. Lardner « Mathematical Analysis for business, Econ. And the life & Social sciences », 4th ed. Prentice Hall Int. eds.1993.
4. Jagdish C. A and Robin W.L. « Mathematical Analysis », 4th ed. 1998.

26