كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

محاضرات في رياضيات المؤسسة

(البرمجة الخطية)

لطلبة السنة الثانية ليسانس LMD

(علوم اقتصادية و تجارية و علوم التسيير)

تمهيد

يتميز عالم اليوم بالإرتباط الوثيق ما بين مختلف العلوم و الأساليب العلمية المستخدمة في معالجة المشاكل التي تواجهها مختلف المؤسسات حيث يبرز هذا الإرتباط أكثر في مجال الإدارة التي تتمثل أهم وظائفها في اتخاذ القرارات الإدارية التي تتطلب الإختيار بين عدد من السياسات البديلة لتحقيق هدف معين، الأمر الذي يدعو إلى توفير بيانات كثيرة، فضلا عن الحاجة لأساليب التحليل العلمية حتى يكون القرار أحسن ما يمكن الوصول إليه في ظل الظروف المتعلقة باتخاذه. كما أن عملية اتخاذ القرارات هذه أصبحت عملية مضنية تتطلب الكثير من الجهد و الوقت و لا يمكن إيجاد الحلول المناسبة لها إلا بالإستعانة بالأساليب الرياضية أو الكمية المناسبة. وبذلك يمكن القول، أن استخدام الأساليب الكمية في مجال اتخاذ القرارات الإدارية يعتبر ظاهرة حديثة تتميز بها الإدارة الحديثة حيث انتقل أسلوب معالجة المشاكل الإدارية من الإطار التقليدي الذي يتميز بالوصف و التجربة و الخطأ إلى الأسلوب الحديث الذي يعتمد على الأسلوب الرياضي في ترجمة و صياغة المشاكل الإدارية و حلها.

و ترجع بداية استخدام الأسلوب العلمي في معالجة مختلف المشاكل إلى فترة الحرب العالمية الثانية حيث أدى هذا الإستخدام إلى معالجة الكثير من المشاكل المعقدة و المتعلقة أساسا بندرة الموارد. و قد نتج عن ذلك بروز ما يعرف اليوم **ببحوث العمليات Recherche opérationnelle** التي إتسع مجال استخدامها بعد الحرب بشكل كبير. و قد ساعد التطور التكنولوجي الهائل في المعلوماتية (الكمبيوتر و البرمجيات) على سهولة استخدام بحوث العمليات حيث تقلصت العمليات الحسابية بشكل كبير وتمت معالجة المشاكل المعقدة وبذلك أصبحت بحوث العمليات أداة هامة في عملية اتخاذ القرار لدى المسيرين خاصة في المؤسسات الصناعية والتجارية الكبيرة نظرا لما تغطيه من مواضيع بالإضافة إلى إدراجها كمادة أساسية ضمن مقررات العديد من الكليات و على رأسها كليات العلوم الإقتصادية وعلوم التسيير .

و تتشعب مكونات بحوث العمليات لتتضمن مواضيع عديدة تعالج أنواع مختلفة من المشاكل مثل صفوف الإنتظار (الطابور) و المحاكاة و مراقبة المخزون و التحليل الشبكي و البرمجة الخطية ...الخ ، إلا أنه يجب الإشارة أنه بالرغم من الأهمية الكبيرة المعطاة للأساليب الرياضية في معالجة مختلف المشاكل الصناعية والتجارية وغيرها ، فإن المسير أو المدير لا يجب أن يصبح أسيرا للنموذج الكمي و يطبق تلقائيا نتائج النموذج في اتخاذ القرارات الإدارية و ذلك راجع للأسباب التالية:

- إن علوم التسيير Management science تعتمد بشكل كبير على معطيات أخرى غير كمية لا تحتويها أو لا تتضمنها الأساليب الرياضية الكمية (مثل المواضيع المتعلقة بالسلوك و التصرف البشري) و ذلك ما يجب على المسير عدم إهماله، بل يجب أخذه بعين الإعتبار حتى لا يكون أسيرا

للأساليب الرياضية و ما قصة المصعد الكهربائي الشهيرة إلا خير مثال على ذلك. و بالرغم من أن علوم التسيير أو الإدارة تتضمن الكثير من المواضيع المتعلقة بالسلوك و التصرف البشري ،إلا أنها ما زالت بعيدة عن إدراجها ضمن الأساليب الرياضية كمتغيرات أو مجاهيل لها دلا لتها.

- إن النتائج المستخلصة من النموذج الرياضي تتضمن درجة من الخطأ بسبب عملية التجريد (اختيار المتغيرات أو العوامل) و عملية تحديد درجة الخطأ هي مسألة حكمية بالدرجة الأولى.و لا شك أن الأساليب الرياضية تعتبر عملية مكملة للحكم الشخصي للأداء و لا تحل محلها. و هناك في الواقع العديد من المشاكل أو المسائل الإدارية التي لا يمكن صياغتها رياضيا و بالتالي لا يعتمد متخذ أو صانع القرار على النماذج الكمية في معالجة هذه المشاكل.

و في ظل هذه القيود فإن التحليل الكمي يعتبر أداة فعالة مساعدة في اتخاذ القرارات الإدارية و في معالجة كثير من المشاكل التي تواجه إدارة المؤسسات الخاصة منها و العامة.

و سنتطرق في هذه المطبوعة إلى موضوع البرمجة الخطية حيث نتناول مواضيع مثل تخطيط الإنتاج و مسائل النقل و التعيين (التخصيص) محاولين قدر المستطاع أن تظهر النماذج الرياضية المختلفة في أبسط صورها و أن نتجنب الإثباتات الرياضية حتى يتمكن كل من لا يتمتع بأي خلفية رياضية من متابعة معظم أجزاء هذا الموضوع. كما نهدف من وراء هذا العمل إلى تعريف الطالب، خاصة في كليات العلوم الإقتصادية، على النماذج الرياضية من اجل تحليل المشاكل التي تواجه المؤسسات و وضع الحلول المناسبة لها و المتعلقة أساسا بتخصيص الموارد المتاحة القليلة بالشكل الأمثل بين مختلف الإستخدامات المتاحة.

و على كل، فإن عرض مثل هذا الموضوع، و بصورة مبسطة، ليس بالأمر اليسير و على الطالب من جانبه أن يحاول تطبيق و استخدام هذه الأساليب بصورة أو بأخرى حتى تتحقق النتائج المرجوة من هذه المادة. و بناء على ذلك ، سيتم تقديم مجموعات من التمارين أو التطبيقات التي تساعد الطالب على فهم و مراجعة النماذج المعروضة في مختلف الفصول، إلا أن ذلك لا يغني بأي حال من الأحوال عن مختلف المراجع المتوفرة في مكتبة الكلية و الجامعة و عبر شبكة الانترنت، لذا يجب على الطالب قراءة هذه المطبوعة بتمعن ثم الاستعانة، بعد الله تعالى، بمختلف المراجع التي تتناول مختلف المواضيع بشكل معمق و مفصل. فهذه المطبوعة تتناول موضوع البرمجة الخطية بشكل موجز و مبسط و تشرح أهم النقاط المطلوب فهمها، و يرجع عدم التفصيل في محتوى هذه المطبوعة لعدة أسباب أهمها أن مقياس رياضيات المؤسسة أصبح يدرس لطلبة السنة الثانية LMD خلال سداسي واحد فقط يتضمن حوالي 15 أسبوعا على الأكثر و هذا ما جعلنا نركز على الأساسيات و نتجنب التفاصيل.

الفصل الأول

مفاهيم حول البرمجة الخطية

مقدمة

تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الهامة في بحوث العمليات حيث تهتم بإيجاد الحلول المنافسة و السريعة للمشاكل المتعلقة باستغلال الموارد المتاحة و الإمكانيات المحدودة من أجل الحصول على أفضل النتائج. و قد لاقى هذا الأسلوب الرياضي انتشارا واسعا لدى مختلف المهتمين باستخدام الأساليب الرياضية الحديثة في عملية التحليل و معالجة المشاكل المتعلقة باتخاذ القرار سواء في المراجع المختصة أو في الممارسات الميدانية بسبب تطبيقاته العديدة في مجالات الصناعة، الخدمات، الإدارة....إلخ وازدادت أهميتها مع تزايد إمكانيات وضع وتطوير برامج حاسوبية لتطبيق الطريقة وإيجاد حلول بالسرعة المذهلة، وبالدقة العالية ومهما كان عدد المتغيرات. فالحل يمكن أن يتوفر في خلال ثواني، ومن أهم هذه البرامج LINDO , LP, STORM.
و فيما يلي نتناول أهم المفاهيم المتعلقة بها.

1) مدخل للبرمجة الخطية:

تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الهامة في بحوث العمليات حيث تهتم بإيجاد الحلول المنافسة و السريعة للمشاكل المتعلقة باستغلال الموارد المتاحة و الإمكانيات المحدودة من أجل الحصول على أفضل النتائج. و قد لاقى هذا الأسلوب الرياضي انتشارا واسعا لدى مختلف المهتمين باستخدام الأساليب الرياضية الحديثة في عملية التحليل و معالجة المشاكل المتعلقة باتخاذ القرار سواء في المراجع المختصة أو في الممارسات الميدانية بسبب تطبيقاته العديدة في مجالات الصناعة، الخدمات، الإدارة...إلخ .

2) نشأة البرمجة الخطية:

ظهر أسلوب البرمجة الخطية بشكله الحديث على يد **George Dantzig** في الولايات المتحدة الإمريكية سنة 1947 حيث تمكن من حل بعض المشاكل التي كان يعاني منها سلاح الطيران الأمريكي في مجالات التخطيط و تحديد برامج الصيانة و التدريب و ذلك بالإعتماد على ما يسمى " **بطريقة السمبلكس "La méthode du simplexe** ". و نظرا للتبسيط الذي جاءت به هذه الطريقة بالإضافة إلى انتشار تكنولوجيا المعلوماتية بشكل واسع، بدأ استعمال هذا الأسلوب في الأغراض الصناعية و الإقتصادية و الإدارية بشكل مثير للإهتمام في مختلف المؤسسات مما سمح بحل المشاكل المعقدة و التي لا يمكن حلها يدويا أو التي تحتاج إلى وقت و جهد طويلين .

3) استخدامات البرمجة الخطية

تستخدم البرمجة الخطية في الكثير من المجالات بغرض إيجاد أفضل الحلول لها مما يجعلها أداة هامة في يد صانع القرار و أهمها:

أ) تنظيم العمليات الإنتاجية و الإختيار بين طرق الإنتاج المختلفة عن طريق إيجاد التوزيع الأمثل لمختلف عناصر الإنتاج (مواد ، عمال ، آلات ...الخ) على مختلف العمليات الصناعية بما يسمح بتحقيق أهداف المؤسسة . و يتجلى ذ لك بشكل كبير في حالة قيام المؤسسة بإنتاج عدة منتجات تتنافس فيما بينها على مختلف عناصر الإنتاج المتوفرة بشكل محدود. ولتفادي بعض الحالات المتمثلة في إنتاج منتجات أقل ربحية أو حدوث تبذير كبير في استخدام الموارد مثلا أو إهدار للطاقة بشكل عام ، تساعد البرمجة الخطية على أخذ مختلف العوامل بعين الإعتبار و إيجاد أفضل العمليات الإنتاجية و المنتجات و تقليل نسبة العادم من المواد في الإنتاج .

ب) تسمح البرمجة الخطية أيضا بمراعاة عنصر الطلب (السوق) و من ثم تحديد برامج الإنتاج و المخزون في كل فترة الأمر الذي يؤدي إلى تخفيض تكاليف الإنتاج و التخزين إلى أدنى مستوى ممكن.

ج) تحديد طرق التوزيع المثلى : كثيرا ما تبحث المؤسسات عن إيجاد أفضل السبل لتزويد زبائنها بالسلع المطلوبة أو تزويد وحدات إنتاجية معينة بمنتجات نصف مصنعة ، و تساعد البرمجة الخطية في ذلك عن طريق تحقيق وفورات كثيرة في الوقت و تكاليف النقل و التوزيع عن طريق إختيار أفضل و أنسب الطرق لتحقيق ذلك.

د) تحقيق التمويل الأمثل : يسمح أسلوب البرمجة الخطية بتحديد أفضل الطرق لتلبية الإحتياجات المالية القصيرة المدى و الذي سيؤدي إلى تخفيض الفوائد إلى أدنى حد ممكن بالإضافة إلى إيجاد أفضل تشكيلة لمصادر التمويل القصيرة الأجل . و يسمح استخدام البرمجة الخطية هنا بتحديد المبالغ التي يجب إقتراضها في كل فترة من كل مصدر (البنك ، الموردين ، مصادر أخرى) مما سيؤدي حتما إلى تخفيض الفوائد التي ستدفعها المؤسسة إلى أدنى حد ممكن و توفير الأموال في الوقت المناسب .

و إضافة إلى الإستخدامات السابقة ، توجد الكثير من الميادين الأخرى التي يمكن ان تكون موضوع البرمجة الخطية و مثال ذلك الوصول إلى أعلى إنتاجية ممكنة للآلات والمعدات والتوزيع الأمثل لسيارات الأجرة على مختلف محطاتها و الطائرات على المطارات بالإضافة إلى إيجاد أفضل الإستثمارات للموارد المالية ...الخ.

4) <u>فوائد استخدام البرمجة الخطية</u>

للبرمجة الخطية فوائد عديدة أهمها :

أ) ترجمة المشاكل الواقعية في شكل رياضي مما يسمح بمعالجة عدد كبير من المتغيرات و التعبير عنها في شكل رياضي مبسط.

ب) إمكانية استخدام أجهزة الكمبيوتر في حل الكثير من المسائل خاصة و أن هناك برامج جاهزة لمعالجة هذا النوع من المسائل و التي يمكن اقتناؤها بسهولة من السوق و هذا ما يوفر لصانع القرار الدقة في التحليل بالإضافة إلى تقليص الجهد و الوقت.

ج) استبعاد الحلول الغير منطقية و التي تعتبر غير ممكنة من جهة و التركيز على الحلول الممكنة فقط و اختيار أحسنها.

5) <u>مفهوم البرمجة الخطية</u>

عرفت البرمجة الخطية بتعاريف عديدة تختلف في ألفاضها لكن مضمونها واحد حيث تتضمن نفس العناصر. فقد عرفت المنظمة العربية للعلوم البرمجة الخطية بأنها:

" **طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادرة من أجل تحقيق هدف معين يكون من المستطاع التعبير عنه إضافة إلى القيود التي تحد من القدرة على تحقيقه في صورة معادلات أو بيانات خطية**".

كما يمكننا تعريف البرمجة الخطية بأنها:

" **عبارة عن أداة أو وسيلة رياضية تساهم في عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بتوزيع الموارد المتاحة (البشرية و المادية) بين الإستخدامات المتنافسة بغية تحقيق هدف محدد (أقصى عائد أو أدنى تكلفة) ضمن مجموعة من القيود أو المحددات**" .

و بتعبير رياضي يمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها:

" **الأسلوب الرياضي الذي يهدف إلى تعظيم Maximiser أو تصغير Minimiser دالة خطية تسمى دالة الهدف La fonction objective و محددة في وجود حدود معروفة أو مفترضة تسمى القيود Les contraintes** ".

و سميت البرمجة الخطية بهذا الأسلوب نظرا لاهتمامها بالبحث عن البرنامج الذي يحقق الهدف المطلوب من بين عدد أو مجموعة كبيرة من البرامج الممكنة. أما صفة الخطية فتعني أن جميع العلاقات ما بين مختلف عناصر النموذج الرياضي للمسألة هي علاقات خطية. و يعني ذلك رياضيا أن كل المتغيرات الداخلة في البرنامج الخطي تكون من الدرجة الأولى. أما إقتصاديا ، فالعلاقة الخطية تعني أن تتغير قيمة المخرجات تبعا لتغير قيمة المدخلات بنفس النسبة و في نفس الإتجاه .

6) **شروط استخدام البرمجة الخطية**

يعتمد أسلوب البرمجة الخطية على مجموعة من الشروط أو الفرضيات الواجب توفرها من أجل التعبير عن المشكلة المواجهة رياضيا و أهمها:

أ)- العلاقة الخطية La linéarité : يجب أن تكون العلاقات بين جميع العوامل و المتغيرات في المسألة خطية. و من هذا الشرط تستمد البرمجة الخطية اسمها. و يعني ذلك أن تكون دالة الهدف و القيود المفروضة على المسألة على هيئة معادلات أو متراجحات من الدرجة الأولى .

ب)- يجب أن يكون من الممكن التعبير عن مختلف العوامل في المسألة في شكل كمي .

ج) – **يجب أن يتوفر عنصر التأكد** من مختلف المعطيات التي تشكل المسألة. أي أن يكون المستقبل معروف بشكل تام و من ثم تكون العلاقات معلومة و مؤكدة أيضا. كما يعني هذا أن نموذج البرمجة الخطية هو نموذج محدد Modèle déterministe.

د) – علاقة تأثير بين المجاهيل : و يعني ذلك أن يكون هناك تأثير متبادل بين المجاهيل التي تشكل النموذج الرياضي و التي نسعى إلى تحديد قيمها حيث أن أي تغير في أحدها سيؤدي حتما إلى إحداث تغير في المجاهيل الأخرى بالزيادة و/أو النقصان .

ه) – توفر البدائل : يجب أن تكون هناك استخدامات متعددة أو متنافسة للموارد المتاحة و هذا يعني وجود عدد من المجاهيل (متغيرين على الأقل) و التي تشكل الغاية من حل النموذج الرياضي للبرنامج الخطي. و يعني ذلك أنه بإمكان المؤسسة مثلا إنتاج السلعة A أو السلعة B أو السلعة C أو كل هذه السلع مجتمعة أو بنسب معينة لأن وجود إستعمال وحيد للموارد المتاحة يلغي وجود البدائل و من ثم المسألة ككل.

و) – التجميعية و الإستمرارية : و يعني هذا أن مختلف الأنشطة التي يتكون متها النموذج الرياضي تقبل مبدأ التجميع ، الذي يعني بأن الأثر الكلي يتم الحصول عليه بجمع الآثار الخاصة بكل متغير، و مبدأ الإستمرارية ، الذي يعني أن مستويات الأنشطة و عوامل الإنتاج المختلفة تكون قابلة بشكل تام للتجزئة .

7) **عناصر البرنامج الخطي**

من خلال التعريف الرياضي السابق للبرمجة الخطية يمكن تحديد ثلاثة عناصر أساسية في البرنامج الخطي و هي:

أ) – دالة الهدف La fonction objective

يعبر عن الغاية المنشودة من وراء الإستغلال الأمثل للموارد المتاحة عن طريق دالة تتضمن مجموعة من المتغيرات ، تسمى متغيرات القرار ، نسعى إلى تحديد قيمها و التي بدورها تحدد مقدار الهدف المنشود . و يطلق على الهدف موضوع البرمجة و الذي يكون وحيدا اصطلاح دالة الهدف .

و يجب الإشارة هنا أنه من الضروري تحديد الهدف موضوع البرمجة تحديدا رياضيا و دقيقا أي تحديد الهدف من معالجة المشكلة بالضبط و ليس التركيز على الأعراض. و قد يكون الهدف متمثلا في حالة تعظيم maximisation(كتعظيم الأرباح أو المبيعات...الخ) أو حالة تخفيض minimisation (كتخفيض التكاليف أو الزمن أو المخاطرة...الخ).

ب) القيود les contraintes:

و هي مجموعة المحددات أو العوائق التي يجب الخضوع لها من أجل تحقيق الهدف و الوصول إلى أفضل قرار و هي تعكس أساسا الموارد المتاحة بشكل محدود مثل ساعات العمل، كمية المواد، مساحة المخازن، الأموال المتوفرة....الخ. كما قد تتمثل في قيود السوق (الطلب) أو قيود أخرى كثيرة يزخر بها محيط المؤسسة. و يجب الإشارة هنا أيضا أنه يجب التعبير عن هذه القيود بشكل رياضي. وللقيود أشكال عديدة فقد تكون على شكل متراجحات من نوع أقل أو تساوي في حالة تحديد الحد الأقصى الذي يجب عدم تجاوزه أو من نوع أكبر أو تساوي في حالة تحديد الحد الأدنى الواجب توفره أو على شكل مساواة في حالة الإلتزام المحدد مثل الطلبيات الخاصة .

ج) عدم سلبية المتغيرات non négativité des variables

و يعني ذلك أن تكون كل المتغيرات في البرنامج الخطي غير سالبة أي يجب أن تكون في أدنى قيمة لها أكبر من الصفر أو تساويه.

8) <u>صيغ النماذج الخطية</u>

يأخذ النموذج الخطي بشكل عام أحد الصيغ التالية:

أ) الصيغة النظامية أو القانونية La forme canonique:

تعتبر هذه الصيغة الشكل الأولي الذي يأخذه النموذج الرياضي عند تشكيل المسألة رياضيا. و تأخذ مسألة البرمجة الخطية هذه الصيغة إذا كانت :

- جميع متغيرات القرار غير سالبة.
- جميع متراجحات القيود من نوع واحد (كلها من نوع أقل أو تساوي أو من نوع أكبر أو تساوي).
- دالة الهدف في حالة تعظيم و كل القيود المرافقة لها من نوع أقل أو تساوي.
- دالة الهدف في حالة تخفيض وكل القيود المرافقة لها في المسألة من نوع أكبر أو تساوي.
- كمية الموارد المتاحة أو الطرف الأيمن من المتراجحة غير محدد الإشارة .

و يمكن تمثيل الصيغة النظامية للنموذج الخطي كما يلي :

❖ **في حالة التعظيم MAX :**

دالة الهدف

$$\text{Max}(Z) = \sum_{J=1}^{n} C_j \cdot X_j$$

القيود

$$\sum_{J=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j \leq b_i \qquad / \; i = 1, 2, 3 \ldots m$$

$$X_j \geq 0 \; / \; j = 1,2,\ldots\ldots, n$$

❖ **أما في حالة التخفيض MIN**

دالة الهدف

$$\text{Min}(w) = \sum_{J=1}^{n} C_j \cdot X_j$$

القيود

$$\sum_{J=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j \geq b_i \qquad / \; i = 1, 2, 3 \ldots m$$

$$X_j \geq 0 \qquad / \; j = 1,2,\ldots\ldots, n$$

ب) الصيغة القياسية أو المعيارية :La forme standard

و هي الصيغة التالية للصيغة النظامية و تستخدم لإيجاد الحل الأولي في البرنامج الخطي. و يأخذ البرنامج الخطي هذه الصيغة المعيارية إذا كانت :

- جميع متغيرات القرار غير سالبة.
- جميع القيود على شكل معادلات أي على شكل مساواة (ما عدا شرط عدم سلبية.
- المتغيرات والذي يعتبر قيدا أيضا).
- دالة الهدف في حالة تعظيم أو تخفيض.
- الطرف الأيمن من القيد غير سالب .

و إذا ما توفرت الشروط السابقة فإن الشكل الرياضي للصيغة المعيارية يكون كسابقه باستثناء القيود التي تصبح على شكل معادلات ، أي أن :

$\text{Min}(w) = \sum_{J=1}^{n} C_j \cdot X_j$	دالة الهدف $\text{Max}(Z) = \sum_{J=1}^{n} C_j \cdot X_j$

القيود	$\sum_{J=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \ / \ i = 1, 2, 3, \ldots, m$
شرط عدم السلبية	$X_j \geq 0 \ / \ j = 1, 2, \ldots, n$

ج) La forme mixte: الصيغة المختلطة

و تتشكل هذه الصيغة من نموذج رياضي يحتوي على قيود مختلفة الإتجاهات أي بعضها يكون من نوع أقل أو تساوي وأخرى على شكل معادلات أو من نوع أكبر أو تساوي . و بذلك فإن البرنامج الخطي يكون ذو صيغة مختلطة إذا لم تأخذ المسألة عند صياغتها الصيغة النظامية أو المعيارية.

و يجب الإشارة أنه بالإمكان الإنتقال من الصيغة المختلطة إلى الصيغة المعيارية أو النظامية ، و كذلك الإنتقال من الصيغة النظامية إلى الصيغة المعيارية باستعمال بعض التحويلات الأولية تماشيا مع الصيغة المراد بلوغها . و أهم هذه التحويلات هي :

1. إن تصغير تابع الهدف Z يكافئ رياضيا تعظيم الصيغة السالبة لهذا التابع أي أن :

$$\textbf{W} = -\textbf{Z} \quad \text{و منه} \quad \textbf{Min w} = \textbf{Max} - \textbf{Z}$$

2. إن أي متراجحة ذات اتجاه معين يمكن أن تستبدل باتجاه معاكس بضرب طرفيها في -1 أي أن :

$$\mathbf{a\,x \geq b} \longleftrightarrow \mathbf{-a\,x \leq -b}$$

3. كل قيد على شكل مساواة يمكن أن يستبدل بمتراجحتين متعاكستين :

$$\mathbf{a\,x = b} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a\,x \geq b} \\ \mathbf{a\,x \leq b} \end{array} \right\}$$

4- كل متراجحة يمكن أن تحول إلى معادلة عن طريق إضافة متغير جديد للجانب الأيسر من المتراجحة من نوع أصغر أو تساوي ، و طرح متغير جديد من ا لجانب الأيسر للمتراجحات من نوع أكبر أو تساوي.

9) الشكل العام لنموذج البرمجة الخطية

تستعمل البرمجة الخطية أساسا لتعظيم أو تخفيض متغير تابع يخضع لمجموعة من المتغيرات المستقلة التي يهدف النموذج الرياضي إلى إيجاد قيم لها في ظل احترام مجموعة من القيود. و يمكن أن يكون المتغير التابع دالة اقتصادية مثل الأرباح، التكاليف، أسابيع العمل...الخ. و يوجد ما بين المتغير التابع Z و عناصره X_i علاقة خطية يمكن تمثيلها في حالة التعظيم مثلا بالمعادلة التالية :

$$\mathbf{Max\ (Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots + C_nX_n}$$

حيث $X_1, X_2, \ldots, X_n$ تمثل المتغيرات المستقلة التي تحدد قيمة أو مقدار المتغير التابع Z وهي غير سالبة.

و يطلق على هذه المعادلة مصطلح **دالة الهدف La fonction objective** حيث نلاحظ أن المتغيرات هي من الدرجة الأولى، و من ثم فإن العلاقة هي علاقة خطية. و تنطبق هذه العلاقة أيضا على القيود التي تأخذ شكل متراجحات و أحيانا أخرى تكون على شكل معادلات أو مساواة خطية . و تكون كل المتغيرات $x_1\ ,\ x_2\ ,..,\ x_n$ **خاضعة لقيود يمكن التعبير عنها** كما يلي:

$$\mathbf{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq b_i}$$

حيث a_i تمثل المعاملات التقنية)الفنية(بينما تمثل b_i مقدار الموارد المتاحة في كل قيد (مقدار الثوابت Les constants) و التي تحدد قيم المتغيرات المستقلة، و كنتيجة لذلك تضع حدا أيضا لقيمة أو مقدار دالة الهدف.

و يجب الإشارة هنا أن القيم التي تأخذها المتغيرات X_n يجب أن تكون موجبة أو معدومة كحد أدنى أي يجب أن لا تكون سالبة و ذلك بسبب الدلالة أو المعنى الإقتصادي الذي تمثله هذه المتغيرات، أي أن قيد عدم سلبية المتغيرات يكون كما يلي :

$$\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0}$$

أما في مسائل التخفيض Min فإن الشكل العام لنموذج البرمجة الخطية فسيكون كما يلي:

دالة الهدف :

$$\mathbf{Min\ (w) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots + C_nX_n}$$

القيود:

$$\mathbf{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \geq b_i}$$

قيد عدم سلبية المتغيرات:

$$\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0}$$

إن الحل الذي سنحصل عليه من البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من القيم للمتغيرات المستقلة التي تحقق **الأمثلية L' optimum** لدالة الهدف في ظل إحترام القيود .

10) محاسن و عيوب البرمجة الخطية

أ) المزايا:

- تخصص الموارد المحدودة نحو أفضل الإستخدامات.
- تؤدي إلى تحسين نوعية القرارات التي تتخذها الإدارة.
- تمكن من تحديد القيود التي تشكل عائقا أمام المؤسسة.
- يمكن استخدام تحليل الحساسية التي تسمح باستخدام أسعار الظل في تحديد الفائدة التي يمكن جنيها من تخفيف بعض القيود أو اتخاذ بعض القرارات الإستثنائية.

ب) العيوب:

- يفترض أسلوب البرمجة الخطية حالة التأكد التام أي أن كل العوامل و العلاقات و المعطيات معروفة بشكل تام، أي أنه لا يأخذ حالة عدم الـــتأكد التي تميز الوقت الحاضر بعين الإعتبار.
- لا يأخذ هذا الأسلوب في التحليل العوامل التي لا يمكن إعطاؤها قيمة معينة و التي قد تؤثر يشكل كبير على اتخاذ القرارات.
- الفرضية الأساسية لهذا الأسلوب تتعلق بافتراض العلاقات الخطية أو المستقيمة فيما يتعلق بدالة الهدف والقيود، و قد لا يتماشى هذا مع الواقع في كثير من الأمور.
- يتطلب هذا الأسلوب استخدام أجهزة الكمبيوتر لحل المسائل المعقدة التي قد يستحيل حلها يدويا.
- قابلية القسمة أو الكسرية: لا يوجد ضمان في الحصول على أرقام أو قيم صحيحة للمتغيرات باستخدام البرمجة. والمقصود بذلك أن حل مسألة البرمجة الخطية لن يعطي بالضرورة أعدادا صحيحة، وهذا يعني قبول كسور كقيم لمتغيرات القرار و قد لا يصلح بالنسبة لبعض المنتجات (سيارة مثلا). و لذلك إذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى استخدام البرمجة بالإعداد الصحيحة.

وعلى الرغم من هذه الانتقادات ، فإن أسلوب البرمجة الخطية يساعد كثيرا على اتخاذ القرارات الإدارية السليمة و يوفر الموارد الإقتصادية المتاحة و يضعها في أفضل استخدام لها على ضوء الهدف المنشود.

الفصل الثاني

صياغة النموذج الرياضي لمسائل البرمجة الخطية

إذا ما توفرت شروط البرمجة الخطية في أية مسالة فان النتيجة هي الحصول على نموذج رياضي يصف النشاط موضوع البحث حيث يمكن التعبير عنه بالصورة التالية:

دالة الهدف ← **تخضع لمجموعة من** ← **القيود المختلفة** ← **التي تكون من نوع** $\leq$ **أو/و** $\geq$ **أو/و** $=$ ← **كمية الموارد المتاحة أو الشروط المحددة**

بناء النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية:

و يعني ذلك تشكيل المسالة في شكل رياضي سواء تعلق الأمر بدالة الهدف أو القيود ويمكن الوصول إلى هذه الخطوة عن طريق الإجابة على الأسئلة التالية:

1) ما هي المجاهيل أو المتغيرات التي يهدف النموذج الرياضي إلى إيجاد قيم لها؟

و يعني ذلك تحديد متغيرات المسألة تحديدا واضحا وسليما حتى لا نركز في بحثنا على أمور ثانوية ونتجاهل الأساس الذي يحقق الهدف المنشود. ويمكن عموما الوصول إلى تحديد دقيق للمتغيرات عن طريق عملية تشريح (إذا صح التعبير) للمطلوب النهائي فإذا كان الهدف يتمثل في تعظيم الأرباح التي ستنتج عن إنتاج وبيع كميات معينة من المنتجات (مثلا P_1، P_2) فان الربح الإجمالي بدون شك يمكن الوصول إليه، إذا كان الربح للوحدة محددا، من خلال ضرورة معرفة الكميات التي يجب إنتاجها وبيعها من المنتوجين P_1، P_2 ومن ثم فان المجاهيل أو المتغيرات التي تبحث عن قيم لها تتمثل في كميات المنتوجين الواجب إنتاجها وبيعها، والتي نرمز لها مثلا بـــ X_1، X_2 على التوالي ويطلق عليها عندئذ متغيرات القرار.

و يجب الإشارة هنا انه يجب دائما عدم الخلط بين اسم المنتوج وكمية المنتوج التي نبحث عنها في المسالة، لكن عن طريق التعريف الصحيح للمتغيرات ثم مقارنتها مع معاملاتها في دالة الهدف والقيود يمكن بكل سهولة أن نكتشف أنها تتوافق فيما بينها و أنها لا تتعارض. فمثلا إذا كانت دالة الهدف تتمثل في تعظيم الأرباح التي ستنتج عن بيع البطاطس بـــالكلغ، فعندئذ يكون المجهول أو المتغير **X** يتمثل في كمية البطاطس الواجب إنتاجها وبيعها و ليس المساحة المخصصة للبطاطس مثلا. فهذه الأخيرة تكون بالمتر المربع أو بالهكتار... الخ، بينما الربح الناتج عن البطاطس هو بالدينار، أي أننا يجب أن نحدد مسبقا هل المجهول هو الكمية أم المساحة مثلا؟

و تعتبر الخطوة الأولى المتعلقة بتحديد المتغيرات من أهم الخطوات في بناء النموذج الرياضي و أي خطأ فيها يؤدي حتما إلى استحالة بناء كامل النموذج الرياضي أو بنائه بشكل خاطئ .

2) ما هو الهدف الذي تصبو المؤسسة إلى تحقيقه؟

إن تحديد المتغيرات بشكل سليم يساعد كثيرا على تشكيل دالة الهدف رياضيا وبشكل سليم ويمكن تحديد الهدف المنشود من خلال المسألة، علما أنه يجب أن يكون في النموذج الرياضي هدف واحد معبر عنه رياضيا في صورة دالة هدف سواء كانت تعظيم Max أو حالة تخفيض Min.

3) ما هي القيود المفروضة على تحقيق دالة الهدف؟

المقصود بذلك هو ترجمة القيود المفروضة على تحقيق الهدف رياضيا حيث يتم من خلالها بشكل عام مقارنة ما هو متوفر من كل مورد مع ما يتم استهلاكه أو استغلاله من ذلك المورد. و يطلق على مقدار الموارد المتاحة اسم الثوابت Les constantes وتكون على الجانب الأيمن من القيود. أما استغلال الموارد من طرف مختلف المنتجات فيتمثل في الجانب الأيسر من القيود، حيث **يتم قراءتها من اليسار إلى اليمين.**

الكمية القصوى للموارد المتاحة ≤ استهلاك الموارد المتاحة من طرف مختلف المنتجات أثناء الإنتاج

(أقل أو تساوي)

أو: الحد الأدنى الواجب توفره ≥ استهلاك الموارد المتاحة من طرف مختلف المنتجات أثناء الإنتاج

(أكبر أو تساوي)

أما عندما تكون القيود عقودا أو شروطا محددة بالضبط كما هو الحال بالنسبة فعندئذ يكون طرفي القيد متساويين أي أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن من القيد.

و في الأخير يجب الإشارة إلى أن قيد أو شرط عدم السلبية المتغيرات يجب أن يعبر عنه بقيد أخير في النموذج الرياضي على شكل $\mathbf{X_i \geq 0}$.

1) مثال عن تخطيط الانتاج:

تقوم شركة الأوراس للنجارة بصناعة منتوجين طاولات وكراسي وتبعها إلى الأسواق المحلية حيث تحقق ربحا عن كل وحدة منتوج قدره 300 دج و200 دج على التوالي.

وتسخر الشركة أقسامها الإنتاجية الثلاثة (نجارة، تلحيم، طلاء) لإنتاج هذه المنتوجات حيث يمر كل منتوج أثناء عملية الإنتاج على الأقسام الثلاثة حتى يصبح قابلا للبيع.

و يوضح الجدول التالي الوقت الذي يستغرقه كل منتوج في كل قسم بالإضافة إلى الطاقة المتاحة في كل قسم.

القسم	المنتوج		مجموع ساعات العمل المتاحة في كل قسم
	طاولة	كرسي	
النجارة	6 سا	6 سا	420 سا
التلحيم	3 سا	6 سا	300 سا
الطلاء	4 سا	2 سا	240 سا

المطلوب: صياغة المسالة في شكل نموذج البرمجة الخطية من اجل تحديد البرنامج الإنتاجي الأمثل من الطاولات والكراسي الواجب إنتاجها وبيعها لتعظيم أرباح الشركة؟

الحل:

نحاول بناء النموذج الرياضي للمسألة عن طريق الإجابة عن الأسئلة الثلاثة السابقة:

أ- ما هي المتغيرات أو المجاهيل التي نبحث عن قيم لها في المسألة؟ (تحديد المتغيرات) :

يمكن معرفة هذه المتغيرات التي نبحث عن إيجاد قيم لها من خلال تحليل المطلوب في نهاية المسألة. فالربح الإجمالي الذي سينتج عن إنتاج و بيع الطاولات يتمثل في الربح الناتج عن وحدة منتوج واحدة (طاولة واحدة) مضروبا في عدد الطاولات. وبما أن الجزء الأول معلوم (ربح الطاولة يساوي 300 دج) فإن المجهول هو عدد الطاولات ونفس الكلام يقال عن الكراسي ومن ثم فإن متغيرات المسألة يمكن التعبير عنها كما يلي:

- نرمز بـــ X_1 لعدد الطاولات الواجب إنتاجها وبيعها من أجل تعظيم الربح الإجمالي.
- نرمز بـــ X_2 لعدد الكراسي الواجب إنتاجها وبيعها من أجل تعظيم الربح الإجمالي.

ب- تحديد دالة الهدف:

بما أن الربح الذي سينتج عن بيع وحدة منتوج من الطاولة هو 300 دج فإن الربح الذي سينتج عن بيع عدد من الطاولات مقداره x_1 سيكون **$300\ X_1$**، وبما أن الربح الذي سينتج عن وحدة منتوج من الكراسي هو **200 دج**، فإن الربح الذي سيتحقق عن بيع عدد من الكراسي x_2 سيكون **$200\ X_2$**، ومن ثم يكون الربح الإجمالي الذي ستحققه الشركة هو عبارة عن الربح الناتج عن الطاولات مضاف إليه الربح الناتج عن الكراسي ونرمز لهذه المعادلة بحرف Z أي أن:

$$Z = 300\,x_1 + 200\,x_2$$

و بما أننا نبحث عن أعظم قيمة لهذه المعادلة فإنه يمكن التعبير رياضيا عن دالة الهدف كما يلي: أوجد القيم الممكنة لمتغيرات القرار X_1، X_2 التي تعظم الربح الإجمالي (Z) والتي يمكن كتابتها كما يلي:

$$\text{Max}\,(Z) = 300\,x_1 + 200\,x_2$$

ج- تحديد القيود:

إن تحقيق أعظم قيمة لدالة الهدف يجب أن يتم في ظل احترام القيود المفروضة على الهدف، وتتمثل هذه القيود أساسا في هذه المسألة في عدد ساعات العمل المتاحة في كل قسم من أقسام الشركة،

وكما سبق الإشارة يمكن التعبير عن قيود استعمال عدد الساعات المتاحة في كل قسم كما يلي **(<u>القراءة من اليسار إلى اليمين</u>) :**

عدد الساعات المتاحة في كل قسم ≤ الزمن المستهلك في إنتاج الطاولات والكراسي في كل قسم
(أقل أو يساوي)

ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا كما يلي:

قيد القسم الأول (قسم النجارة):

إن عدد الطاولات التي سيتم إنتاجها في هذا القسم هو X_1 وكل طاولة تستغرق زمنا قدره X ساعات في قسم النجارة ومن ثم فإن الوقت الذي تستغرقه مجمل الطاولات المنتجة في هذا القسم هو $6\ X_1$ إلا انه يمكن إنتاج كراسي في هذا القسم أيضا، وبما أن عدد الكراسي التي سيتم إنتاجها هو X_2 وكل كرسي يستغرق زمنا قدره **6** ساعات ، فإن الوقت الذي يستغرقه إنتاج مجمل الكراسي في قسم النجارة هو $6\ X_2$.

وبذلك يمكن القول أن الوقت الكلي الذي سيستغرقه إنتاج الطاولات والكراسي في قسم النجارة هو:

$$6X_1 + 6\ X_2$$

ويجب مقارنة هذا الوقت الذي يستغرقه إنتاج المنتوجين في قسم النجارة مع الوقت المتاح فيه و هو **480 ساعة** بحيث يجب أن يكون الوقت المستغرق في إنتاج المنتوجين أقل أو يساوي الوقت المتاح و لا يمكن بأي حال من الأحوال أن يتجاوزه، عندئذ يمكن كتابة هذا القيد رياضيا كما يلي:

- $6\ X_1 + 6\ X_2 \leq$ **480 سا**

وما قيل عن قسم النجارة يمكن قوله أيضا عن القسمين الآخرين، قسم التلحيم وقسم الطلاء، مع الانتباه إلى اختلاف الزمن المستغرق من طرف كل منتوج في كل قسم بالإضافة إلى اختلاف الطاقة المتاحة في كل قسم و بذلك يمكن كتابة القيدين المتعلقين بقسمي التلحيم والطلاء كما يلي:

- قيد قسم التلحيم: $3\ X_1 + 6\ X_2 \leq$ **380 سا**

- قيد قسم الطلاء: $4\ X_1 + 2\ X_2 \leq$ **240 سا**

و في الأخير يجب عدم إهمال شرط عدم سلبية المتغيرات والذي يمكن التعبير عنه كما يلي:

- $X_1 , X_2 \geq 0$

و بعد تحديد المتغيرات والتعبير عن دالة الهدف والقيود رياضيا يمكن تلخيص النموذج الرياضي للمسألة السابقة كما يلي:

أوجد عدد الطاولات (X_1) وعدد الكراسي (X_2) الواجب إنتاجها من أجل:

تعظيم دالة الهدف $\text{Max } (Z) = 300\ X_1 + 200\ X_2$

و احترام القيود:

- **قيد قسم النجارة:** $6\ X_1 + 6\ X_2 \leq 420$ **سا**
- **قيد قسم التلحيم:** $3\ X_1 + 6\ X_2 \leq 380$ **سا**
- **قيد قسم الطلاء:** $4\ X_1 + 2\ X_2 \leq 240$ **سا**
- **شرط عد السلبية:** $X_1 , X_2 \geq 0$

2) مثال عن المزيج الغذائي

تكون المسالة في هذه الحالة على شكل مسالة تحديد مكونات وجبة يومية مثلا سواء للحيوان أو للإنسان حيث يفترض أن هذا الخليط يحتوي على عدة عناصر غذائية P_i و التي يجب أن يستهلك المعني منها يوميا a_i وحدة حيث $(i=1,2,\ldots,m)$ و هناك v_j نوعا من المواد المغذية، تكلفة الوحدة منها c_j حيث $(j=1,2,\ldots m)$، و يرمز بـ a_{ij} لعدد الوحدات الغذائية من النوع P_i المتوفرة في وحدة من المادة المغذية v_j ، كما هو موضح في الجدول أدناه.

العناصر الغذائية	الحد الأدنى المطلوب	المواد المغذية			
		v_1	v_2		v_n
P_1	a_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
P_2	a_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
P_n	a_3	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}
تكلفة الوحدة من المواد الغذائية		c_1	c_2		c_n

فإذا رمزنا ب X_j لعدد الوحدات من المادة v_j التي ستستخدم في المزيج الغذائي، فستكون تكلفة هذا المزيج الغذائي الممثل بدالة الهدف الواجب تخفيض قيمتها إلى ادني مستوى و لتكن $Min(w)$على الشكل التالي:

$$\text{Min}(w) = \sum_{j=1}^{n} = \quad c_j\ x_j$$

مجموع القيمة الغذائية من النوع P_i في هذا المزيج هي

$$\sum_{j=1}^{n} = \quad a_{ij}\ x_j \quad \geq\ a_i \qquad i=1,2,\ldots,m$$

قيد أن الكمية المستخدمة من أي مادة مغذية لا يمكن أن تكون سالبة أي $x_j \geq 0$

و بذلك تتمثل المسالة في إيجاد قيم x_j حيث ($j=1,2,\ldots,m$) بحيث يتم تحقيق القيود السابقة و تجعل قيمة دالة الهدف في حدودها الدنيا.

مثال

تحضر إحدى المزارع المتخصصة في تربية الدواجن غذاءا يتلائم و متطلبات نمو الكتاكيت التي تحتاج أسبوعيا على الأقل إلى 2000 كلغ من مزيج غذائي يتطلب مزج مجموعة من المواد المتمثلة في الشوفان و الذرى و الصويا و التي توفر متطلبات الكتاكيت من عناصر الكالسيوم و البروتين و الألياف. و يوضح الجدول التالي مكونات الكلغ من المواد الثلاثة من مختلف العناصر بالإضافة لتكلفتها.(لاحظ خلو النخالة من البروتين و الألياف).

المادة	الكالسيوم	البروتين	الألياف	التكلفة دج / للكلغ
الشوفان	0.38 كلغ	----	----	0.04
الذرى	0.001 كلغ	0.09 كلغ	0.02 كلغ	0.15
الصويا	0.002 كلغ	0.50 كلغ	0.08 كلغ	0.40

و لكي يكون الغذاء صحيا يجب ان يحتوي المزيج الغذائي

- على الأقل على 0.8 % من الكالسيوم لكن ليس أكثر من 1.2 % .
- على الأقل على 22 % من البروتين.
- ليس أكثر من 5 % من الألياف.

المطلوب تحديد الكمية (عدد الكلغ) الواجب استعمالها من المواد الثلاثة في المزيج الغذائي لتغذية الكتاكيت بأقل تكلفة مع احترام شروط الغذاء الصحي السابق ذكرها.

الحل

- **تحديد المتغيرات ليكن**
  - X_1 = كمية (عدد الكلغ) الشوفان في المزيج الغذائي
  - X_2 = كمية (عدد الكلغ) الذرى في المزيج الغذائي
  - X_3 = كمية (عدد الكلغ) الصويا في المزيج الغذائي
- **تحديد دالة الهدف** $\mathbf{Min\ (w) = 0.04\ X_1 + 0.15\ X_2 + 0.40\ X_3}$
- **تحديد القيود**
  - قيد الحد الأدنى لكمية المزيج الغذائي الأسبوعي $\mathbf{X_1 + X_2 + X_3 \geq 2000}$
  - قيد الحد الأدنى من الكالسيوم

$$0.38X_1+0.001X_2+0.002X_3 \geq 0.008\ (X_1+X_2+X_3)$$

و بتحويل جميع المتغيرات إلى الطرف الأيسر يصبح القيد كما يلي

$$\mathbf{0.372\ X_1 - 0.007\ X_2 - 0.006\ X_3 \geq 0}$$

- قيد الحد الأقصى من الكالسيوم

$$0.012\ (X_1+X_2+X_3) \leq 0.38X_1+0.001X_2+0.002X_3$$

و بتحويل جميع المتغيرات إلى الطرف الأيسر يصبح القيد كما يلي

$$\mathbf{0.368\ X_1 - 0.11\ X_2 - 0.010\ X_3 \leq 0}$$

- **شرط عم سلبية المتغيرات** $\mathbf{X_1 , X_2 , X_3 \geq 0}$

3-مثال عن عملية الاستثمار

يدرس أحد المستثمرين استثمار مبلغ 1.000.000 دج في عدة استثمارات تختلف من حيث عائدها و مخاطرها. و يتمثل الاستثمار الأول في اقتناء أسهم في شركة " الأسمدة " حيث يقدر العائد من الدينار المستثمر ب 0.15 دج مقابل درجة مخاطرة تقدر بشكل عام ب 16% . أما الإستثمار الثاني فيتمثل في اقتناء أسهم في شركة " اسمنت الشرق" و التي يقدر عائد الدينار فيها ب 0.25 دج مقابل درجة مخاطرة تقدر ب 22 %. فإذا كان هذا المستثمر يبحث عن تعظيم العائد من استثمار أمواله و في نفس الوقت أن لا تتجاوز الخسارة مبلغ 10.000 دج حالة وقوعها، شكل النموذج الرياضي لهذه المسالة باعتبارها مسالة برمجة خطية؟

الحل

- **تحديد المتغيرات**

ليكن X_1 المبلغ الذي سيتم استثماره في أسهم شركة الأسمدة

ليكن X_2 المبلغ الذي سيتم استثماره في أسهم شركة إسمنت الشرق

- **تحديد دالة الهدف**

$$\mathbf{Max\ (z) = 0.15\ X_1 + 0.25\ X_2}$$

- **تحديد القيود**

قيد المبلغ الإجمالي: $X_1 + X_2 \leq 1000.000$

قيد المخاطرة: $0.15\ X_1 + 0.25\ X_2 \leq 10.000$

قيد عدم السلبية: $X_1 , X_2 \geq 0$

تمارين :

تمرين رقم1

تقوم إحدى التعاونيات بإدارة ثلاثة مزارع متباعدة أ، ب، ج حيث تبلغ مساحة كل منها 700 ،600، 300 هكتار على التوالي ، و يمكن زراعة 03 منتوجات (ك)،(ل)،(م) في أية مزرعة من المزارع الثلاثة و فيما يلي مختلف المعلومات الإضافية:

المنتوج	عدد الوحدات المنتجة في الهكتار	أقصى كمية يمكن بيعها	استهلاك المياه م^3/هكتار	ربح/ وحدة
ك	25	2000 وحدة	5	6 دج
ل	20	25000 وحدة	4	4
م	21	8500 وحدة	3	2

و ينتظر أن يكون إستهلاك المياه عامل فعال،حيث أن الكميات المتاحة في كل مزرعة تقدر بـ 2800 م^{3}في المزرعة أ ،2000 م^3 في المزرعة ب ، 1000 م^3 في المزرعة ج.

المطلوب: شكل المسألة على شكل معادلات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية بحيث تحقق التعاونية أكبر ربح ممكن من إستعمال مزارعها.

تمرين رقم2

تقوم إحدى الشركات المتخصصة في صناعة لعب الأطفال بصناعة ثلاثة أنواع من اللعب: سيارات شرطة، شاحنات المطافئ وطائرات مروحية. و تستعمل هذه المؤسسة في عملية الإنتاج مادتين أوليتين هما الخشب و البلاستيك حيث تتوفر كمية مقدارها 2500 قطعة خشبية و 3500 قطعة بلاستيكية.أما الكميات اللازمة من هذه المواد لصناعة اللعب فهي كما يلي:

المادة الأولية	الكمية اللازمة لكل لعبة(قطعة)		
	سيارة	شاحنة	طائرة
بلاستيك	5	3	4
خشب	3	5	7

أما الوقت المخصص لصناعة طائرة فهو يساوي ضعف الوقت المخصص لصناعة شاحنة مطافئ و ثلاثة أضعاف الوقت المخصص لصناعة سيارة.أما الطاقة الإنتاجية للشركة فهي تساوي إنتاج 600 طائرة. أما المبيعات المقدرة لكل لعبة فهي تساوي 125 لعبة على الأقل من كل نوع. كما أنه لأسباب تقنية يجب إنتاج عدد من السيارات يكون ضعف عدد الطائرات. أما الربح الخاص بكل لعبة فهو 200 دينار عن السيارة و 250 عن الشاحنة و500 عن الطائرة.

المطلوب :إيجاد البرنامج الخطي الذي يسمح بإيجاد مخطط الإنتاج الأمثل الذي يسمح بتعظيم الأرباح.

تمرين رقم3

يعمل سوق تجاري لمدة 24 ساعة يوميا بدون انقطاع و يحتاج لعدد من عمال الأمن كحد ادنى لضمان امن السوق كما هو موضح أدناه.

الفترة	1	2	3	4	5	6
أوقات الشغل	**7 -3**	**11-7**	**15-11**	**19-15**	**23-19**	**03-23**
العدد المطلوب كحد أدنى	7	20	14	20	10	5

و للعلم تتبع الفترة 6 الفترة رقم 1 مباشرة حيث يعمل كل عامل امن 8 ساعات متتالية ابتداءا من اي فترة من الفترات الست. حدد ورقة تشغيل يومية للعمال بأقل عدد ممكن منهم و تفي بالمتطلبات.

تمرين رقم4

تنتج إحدى المؤسسات ثلاثة أنواع من الكرات الرياضية: كرات قدم، كرات السلة و كرات الطائرة باستخدام موارد تتمثل في الجلد و اليد العاملة. و يوضح الجدول التالي كافة البيانات المتعلقة باحتياجات الإنتاج و كميات الموارد المتاحة بالإضافة إلى ربح وحدة المنتوج.

	الربح للوحدة (دج)	اليد العاملة (ساعة)	الجلد (وحدة)
كرة القدم	800	4	3
كرة السلة	700	3	2
كرة الطائرة	600	2	4
الطاقة المتاحة		6000	4000

المطلوب:

1) – شكل النموذج الرياضي لهذه المسألة الذي يسمح بتعظيم الأرباح (الحل غير مطلوب) .
2) –**أكتب القيد الإضافي** الذي يضمن بأن يكون إنتاج كرات القدم على الأقل 40 % من الإنتاج الكلي .
3) – يمكن للمؤسسة بيع مادة الجلد بربح 200 دج للوحدة . **شكل النموذج الرياضي الجديد** في هذه الحالة .

تمرين رقم5

يهدف مدير إحدى الشركات إلى تطوير سمعة شركته و زيادة مبيعاتها من مختلــف المنتجــات التـــي تنتجها بالقيام بحملة إشهارية في مختلف وسائل الإعلام ،إلا أن الميزانية المخصصة لذلك محـــدودة و تقدر بـ 110000 دج فقط.

و لذلك يحاول المدير إيجاد كيفية توزيع هذا المبلغ على مختلف وسائل الإعلام المتاحة أمامه لتحقيق أقصى تأثير له على المستهلكين و بالتالي زيادة المبيعات خاصة و أن عدد المطلعين على الإعلانـــات الإشهارية مختلف حسب كل وسيلة إعلام.أما طاقة كل وسيلة إعلام وتكلفة الإعلان فيها و تأثيرهـــا فهو موضح فيما يلي:

الوسيلة	كلفة كل إعلان	العدد الأقصى للإعلانات	عدد الوحدات المقدر بيعها بعد كل إعلان
القناة التلفزية1	3000 دج	30	100 وحدة
القناة التلفزية2	2500 دج	20	80
الإذاعة	2000 دج	30	75
جريدة يومية	1200 دج	30	15
مجلة أسبوعية	500 دج	20	40

- بالإضافة إلى ما سبق، فقد وضع مجلس إدارة الشركة بعض الشروط لمدير قسم الإشهار تتمثل في أن يكون هناك على الأقل 10 إعلانات متلفزة، و في نفس الوقت يجب عدم صرف أكثـــر من 36000 دج على هذه الإعلانات.
- **المطلوب:** شكل النموذج الرياضي لمسألة البرمجة الخطية هذه علما أن الشركة تهـــدف إلـــى تحقيق أقصى مبيعات لها.

الفصل الثالث

طرق حل مسائل البرمجة الخطية: الطريقة البيانية

هناك عدة طرق يتم بواسطتها حل مسائل البرمجة الخطية و يعتمد استخدام احد هذه الطرق دون غيرها على طبيعة و حجم المسألة موضوع البحث، أو رغبة الجهة صانعة القرار. و من أهم هذه الطرق ما يلي:

أ) – الطريقة البيانية Méthode graphique

ب) – طريقة السمبلكس Méthode du simplexe

وتستعمل الطريقة البيانية كمدخل في البرمجة الخطية لحل المسائل البسيطة ولتقديم الدارس إلى الأساليب أو الطرق الأخرى الأكثر كفاية وتعقيدا كطريقة السمبلكس كما أنها تستعمل بشكل عام عندما يكون عدد المتغيرات في المسألة قليل حتى يمكن رسمها على الرسم البياني (أي هناك متغيرين فقط في المسألة).

أما عند تعقد المسألة موضوع البرمجة (أي عند وجود أكثر من متغيرين في المسألة) فإن الطريقة البيانية تصبح غير قادرة على إيجاد حل لتلك المسألة و لا بد من استعمال طريقة السمبلكس أو غيرها من الطرق، وفيما يلي نتناول هاتين الطريقتين بالشرح في حالة تعظيم الهدف أو تخفيضه.

أولا : الطريقة البيانية: حالة التعظيم MAX

هناك مجموعة من الخطوات يمكن إتباعها للحل بالطريقة البيانية ونعتمد في ذلك على مسألتنا السابقة (شركة الأوراس للنجارة) والتي تم تشكيل نموذجها الرياضي في المرحلة السابقة.

1- بما أن المسألة تتعلق بمتغيرين فقط (عدد الطاولات x_1، وعدد الكراسي x_2) فإن أول خطوة تتمثل في تخصيص الخط الأفقي من الرسم البياني لأحد المنتوجين (عدد الطاولات x_1) والخط العمودي للمنتوج الآخر (عدد الكراسي x_2).

ويجب الإشارة هنا أن شرط عدم سلبية المتغيرات $X_i \geq 0$ يؤدي إلى التركيز على المنطقة الموجبة فقط من الرسم البياني أي الربع العلوي الأيمن من الرسم البياني.

2- إدراج القيود على الرسم البياني:

نلاحظ أن كل قيد في مسألتنا يمكن تجزئته إلى جزئين أساسيين، الأول على شكل معادلة و الثاني على شكل متراجحة كما هو موضح أدناه:

القيد الأول:

$$6x_1 + 6x_2 \leq 420 \Rightarrow 6x_1 + 6x_2 = 420$$

و $6x_1 + 6x_2 < 420$

القيد الثاني:

$$3x1 + 6x_2 \leq 300 \Rightarrow 3x1 + 6x_2 = 300$$

و $3x_1 + 6x_2 < 300$

القيد الثالث:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 240 \Rightarrow 4x_1 + 2x_2 = 240$$

و $4x_1 + 2x_2 < 240$

أ) تحديد إحداثيات المتغيرات:

لتحديد إحداثيات المتغيرات نستخدم الجزء الأول من كل قيد والذي يكون على شكل مساواة حيث يتم حساب الطاقة الإنتاجية الخاصة بكل منتوج على حدة في كل قسم مع إلغاء المنتوج الآخر أو وضعه مساويا للصفر، ففيما يتعلق بالقسم الأول فانه يتوفر على 420 ساعة وإذا ما تم تخصيصها بالكامل لإنتاج الطاولات فقط (x_1) (أي عدم إنتاج الكراسي ومن ثم x_2 =0) فإنه بإمكان المؤسسة إنتاج 420 ٪ 6=70 طاولة أي أن x_1 =70. و نفس الكلام يمكن قوله عند تسخير كل طاقة القسم الأول (420 ساعة)، لإنتاج الكراسي فقط (أي عدم إنتاج الطاولات ومن ثم x_1 =0). فيمكن عندئذ إنتاج 420÷6=70 كرسي أي أن x_2 =70.

إذا لدى المؤسسة في القسم الأول اختيار إنتاج إما 70 طاولة فقط (x_1 =70) أو 70 كرسي فقط (x_2 = 70) و ذلك باستعمال كافة طاقة القسم الأول المتاحة. و بذلك يمكن القول أن إحداثيات القيد الأول هي x_1=70، x_2=70. و بشكل مبسط نأخذ الجزء الأول من القيد الذي يكون على شكل مساواة، ونضع أحد المتغيرات مساو للصفر فنتمكن من تحديد مقدار المتغير الثاني والعكس صحيح، فمثلا عند وضع x_1 =0 في القيد الأول نجد $6x_2$=420، ومن ثم x_2=70 ويشكل هذا الرقم الإحداثية الأولى. أما عند وضع x_2 مساو للصفر فإن x_1=70. وبالتالي فان إحداثيات القيد الأول هي x_1=70 و x_2=70.

وبنفس الطريقة نحدد إحداثيات القيود الأخرى.

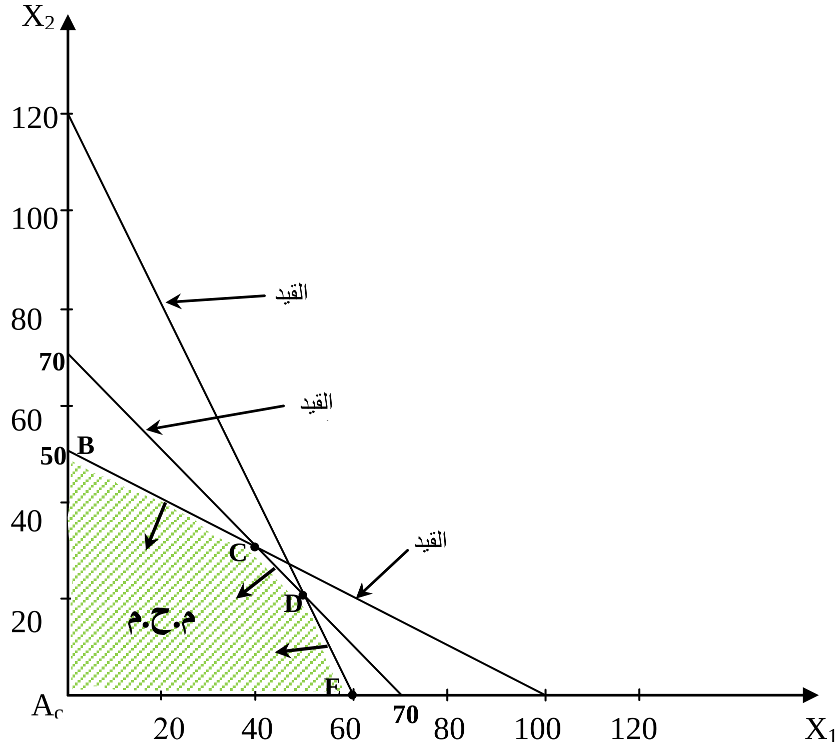
	الطاقة الإنتاجية الممكنة في		
	القسم 1	القسم2	القسم3
إما إنتاج طاولات فقط وبالتالي x_1=	70 طاولة	100 طاولة	60 طاولة
أو إنتاج كراسي فقط وبالتالي x_2=	70 كرسي	50 كرسي	120 كرسي

و كخلاصة فإن إحداثيات x_1، x_2 في كل قيد هي كمال يلي:

- القيد الأول: $x_1=70$، $x_2=70$.
- القيد الثاني: $x_1=100$، $x_2=50$.
- القيد الثالث: $x_1=60$، $x_2=120$.

ب) رسم القيود على الرسم البياني:

بعد تحديد إحداثيات المتغيرات في الخطوة السابقة، يمكن إدراج إحداثيات المتغيرات الخاصة بكل قيد على الرسم البياني فنتحصل على خطوط مستقيمة، وبذلك فان جميع النقاط الواقعة على تلك الخطوط تحقق الجزء الأول فقط من القيود، أي الجزء الذي يكون على شكل مساواة، إلا أن قيود المسألة من نوع أقل أو تساوي ومن ثم فإن الجزء الثاني من القيود والذي هو على شكل "أقل" يمكن التعبير عنه بأسهم تتجه نحو المنطقة التي يغطيها القيد وهي نحو الأسفل في الرسم البياني أدناه، وبذلك فإن النقاط أو البرامج الإنتاجية التي تحقق كل قيد هي النقاط الواقعة على خطوط القيود نفسها بالإضافة إلى النقاط الواقعة أسفل تلك الخطوط.



رسم بياني رقم 1

3. – تحديد منطقة الحلول الممكنة:

بعد رسم القيود على الرسم البياني وتحديد المناطق أو النقاط التي تغطيها تلك القيود، يمكن أن نلاحظ أن بعض النقاط تغطيها أو تشملها قيود معينة بينما لا تشملها قيودا أخرى أي أن تلك النقاط لا تحقق كل القيود ومن ثم فإن الوصول إلى الحل الأمثل لهذه المسألة يتطلب تحديد الحلول الممكنة أو

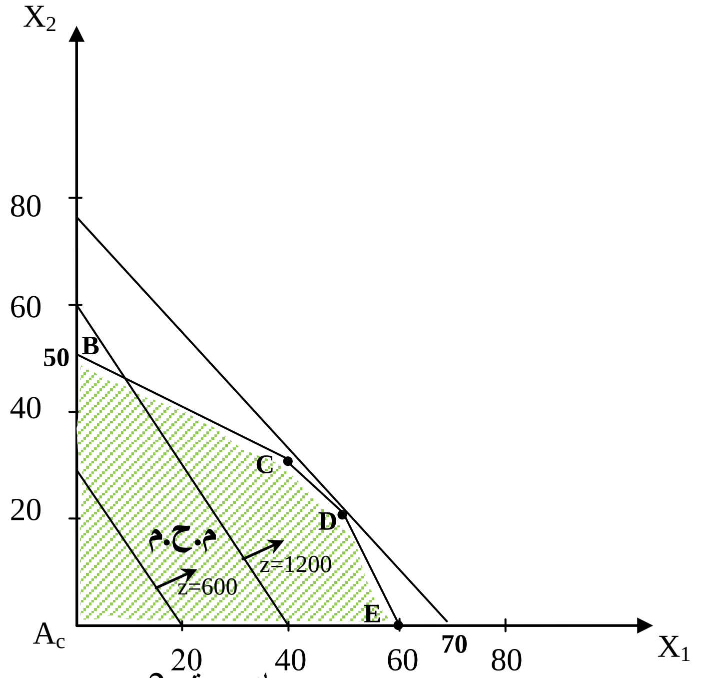
المقبولة من طرف كل قيود المسألة أولا، ولذلك يجب تحديد منطقة الحلول الممكنة أو المشتركة والتي تتحقق فيها جميع قيود المسألة.

وتعرف منطقة الحلول الممكنة (م.ح.م) بأنها المنطقة التي تتحقق فيها جميع قيود المسألة وهي في مثالنا محددة بخطوط القيود من الأعلى ومن طرف خطي الإحداثيتين x_1، x_2 من الأسفل وعلى الجانب الأيسر. و تعتبر المنطقة المحددة ABCDE في الرسم السابق منطقة للحلول الممكنة تتحقق فيها جميع قيود المسألة، وكل نقطة (برنامج إنتاجي) توجد على حدود هذه المنطقة أو داخلها تحقق جميع القيود ومن ثم يمكن اعتبارها حلا ممكنا.

4- إيجاد الحل الأمثل:

بالرغم من أن عدد الحلول الممكنة التي تشملها منطقة الحلول الممكنة كبير جدا، إلا أن الوصول إلى الحل الأمثل يمكن أن يتم بإحدى الطريقتين التاليتين.

عن طريق رسم خطوط دالة الهدف على الرسم البياني وملاحظة اتجاه ازدياد تلك الخطوط كما هو موضح على الرسم البياني التالي:



رسم بياني رقم 2

ولرسم خطوط دالة الهدف على الرسم البياني نقوم بإعطاء قيم متزايدة عشوائية لدالة الهدف (Z) (يفضل أن تكون هذه القيم تقبل القسمة على دالة الهدف دون باقي)، ثم نحدد إحداثيات المتغيرات X_1، X_2 بوضع أحدهما مساويا للصفر ثم إيجاد مقدار المتغير الآخر كما فعلنا سابقا مع القيود، والهدف من القيم المتزايدة العشوائية لدالة الهدف هو تحديد الاتجاه الذي تزداد فيه قيمة دالة الهدف ، و في الرسم البياني أعلاه بدأنا بقيمة عشوائية لــ (Z) مقدارها 600 فكانت إحداثيات $20=X_1$، $30=X_2$، ثم زدنا قيمـــة Z لتصبح 1200 ثم 1900 حيث كـــــانت قيم X_1، X_2 تتغير في كل مرة،

ومن أجل الوصول إلى الحل الأمثل، نحرك خط دالة الهدف نحو الأعلى ونحو الاتجاه الذي تأخذه بخطوط متزايدة إلى غاية ملامسة آخر نقطة من منطقة الحلول الممكنة. والرسم البياني أعلاه يوضح أن آخر نقطة من منطقة الحلول الممكنة يلمسها خط دالة الهدف هي النقطة "D" و التي، كما رأينا سابقا، يتقاطع فيها القيد الأول مع القيد الثالث، وبذلك يمكن الوصول إلى إحداثيات النقطة "D" عن طريق حل معادلات القيدين الأول والثالث مع بعضهما:

- القيد الأول $6X_1+6X_2=420$
- القيد الثالث: $4X_1+2X_2=420$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $X_1=50$ وحدة و $X_2=20$ وحدة.

أي أن الحل أو البرنامج الإنتاجي الأمثل يتمثل في إنتاج 50 طاولة ($x_1 = 50$) و 20 كرسي ($x_2 = 20$) مع تحقيق ربح إجمالي قدره $Z=300(50)+200(20)=1900$

أما **الطريقة الثانية** للوصول إلى الحل الأمثل فهي أسهل وأبسط حيث أنها تعتمد على بعض النتائج المستخلصة من الطريقة الأولى. فكما نلاحظ من الرسم السابق أنه كلما ابتعدنا عن نقطة الأصل (0،0) كلما زادت الكميات المنتجة وبالتالي زادت دالة الهدف أي زادت الأرباح، ومن ثم فإن الحل الأمثل يتواجد في أبعد نقطة ضمن منطقة الحلول الممكنة عن نقطة الأصل أو نقطة الصفر كما أن الحل الأمثل يمكن الوصول إليه بسهولة لأنه يتواجد دائما على أحد أركان منطقة الحلول الممكنة ولذلك يجب دراسة أركان هذه المنطقة وهذا ما تعتمد عليه هذه الطريقة و نوضحه في الجدول التالي:

- إحداثيات النقطة A: $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$
- إحداثيات النقطة B: $x_1 = 0$ ، $x_2 = 50$
- إحداثيات النقطة C: هي حاصل تقاطع القيدين الأول و الثاني و بحل معادلتيهما نجد قيم المتغيرين X_1 و X_2 كما هو في الجدول أدناه.
- إحداثيات النقطة D: هي حاصل تقاطع القيدين 1،3 ومن ثم يجب حل معدلتيهما لإيجاد قيم X_1 ، X_2 كما هو في الجدول أدناه.
- إحداثيات النقطة E: واضحة من الرسم البياني حيث $X_1 = 60$ و $X_2 = 0$.

النقطة	حجم الإنتاج		الربح الإجمالي $Z=300X_1+200X_2$
	طاولات X_1	كراسي X_2	
A	0	0	0
B	0	50	10000
C	40	30	18000
D *	50	20	19000
E	60	0	18000

نلاحظ أن أعظم ربح يمكن الحصول عليه عند النقطة D ضمن منطقة الحلول الممكنة حيث أن X_1=50، X_2=20، Z= 1900 وهو أعظم ربح يمكن الحصول عليه ضمن معطيات المسألة هذه.

5- شرح الحل الأمثل والتحقق منه:

بعد الحصول على الحل الأمثل، فانه يمكن التحقق من صحة الحل بالتعويض بإحداثيات الحل الأمثل في كل من دالة الهدف وقيود المسألة كما هو مبين أدناه:

دالة الهدف:

$$Z = 300\,X_1 + 200\,X_2$$
$$= 300\,(50) + 200\,(20) = 1900$$

القيد الأول:

$$6\,X_1 + 6X_2 \leq 420$$
$$6\,(50) + 6(20) \leq 420$$
$$300 + 120 \leq 420$$
$$420 \leq 420$$

إذا القيد الأول محقق ونلاحظ أن الطاقة المستغلة تساوي الطاقة المتاحة ومن ثم فإن الباقي يساوي صفر.

القيد الثاني:

$$3\,X_1 + 3\,X_2 \leq 300$$
$$3\,(50) + 3\,(20) \leq 300$$
$$150 + 120 \leq 300$$
$$270 \leq 300$$

إذا القيد الثاني محقق ونلاحظ بقاء 30 ساعة غير مستغلة حيث أن الطاقة المتاحة 300 ساعة والطاقة المستغلة 270 ساعة فقط.

القيد الثالث:

$$4\,X_1 + 2\,X_2 \leq 240$$
$$4\,(50) + 2\,(20) \leq 240$$
$$200 + 40 \leq 240$$
$$240 = 240$$

إذا القيد الثالث محقق ونلاحظ أن الطاقة المتاحة تم استغلالها بالكامل.

شرط عدم سلبية الإنتاج وهو محقق أيضا حيث X_1=50، X_2=20.

و بذلك فان هذا الحل مقبول نظرا لتحقيقه جميع قيود المسألة من جهة وتعظيمه للأرباح من جهة أخرى. كما يجب الإشارة هنا أنه يمكن تحديد الطاقات الغير مستغلة في كل قسم وذلك بالتعويض بإحداثيات الحل الأمثل في القيود.

ففي القيد الأول لاحظنا أعلاه أن الطاقة المتاحة 420 ساعة بينما الطاقة المستغلة (الطرف الأيسر من القيد) هي أيضا 420 ساعة ومن ثم فإن الباقي يساوي صفرا أي أن الطاقة المتاحة استغلت بكاملها في القيد الأول.

أما فيما يتعلق بالقيد الثاني (القسم الثاني) فان الطاقة المتاحة تقدر بــ300 ساعة بينما الطاقة المستغلة تقدر بــ 270 ساعة فقط وهذا يعني أن هناك 30 ساعة غير مستغلة في القسم الثاني ويجب على مسؤولي المؤسسة تدبر شأنها.

أما القيد الثالث (القسم الثالث) فالطاقة المتاحة تقدر بــ 240 ساعة والطاقة المستغلة تقدر أيضا بــ 240 ساعة ومن ثم فإن الباقي يساوي صفرا أي أن كل الطاقة المتاحة استغلت بالكامل.
إن تحديد الطاقات المستغلة بالكامل أو الغير مستغلة بالكامل يؤدي بنا إلى تحديد أنوع مختلفة من القيود وهذا ما سنتطرق إليه في العنوان التالي.

6. أنواع القيود:

من الشرح أعلاه يمكن أن نستنتج أن هناك عدة أنواع من القيود حيث يمكن تصنيفها إلى قيود محددة لنشاط المؤسسة وأخرى غير محددة لنشاط المؤسسة. فالقيد المحدد لنشاط المؤسسة هو القيد الذي تستغل طاقته بالكامل ولذلك يمكن أن نطلق عليه قيد الطاقات النادرة contrainte Saturée. أما القيود التي لم تستغل طاقاتها بالكامل فيطلق عليها اسم قيود الطاقات الفائضة contraintes non saturées.

ويشترك النوعان من القيود في تحديد منطقة الحلول الممكنة كما نلاحظه منم الرسم البياني الأول، إلا أن النوع الأول من القيود فقط والمتمثل في قيود الطاقات النادرة هو الذي يلعب دورا أساسيا في تحديد نقطة الحل الأمثل.و بالاعتماد على مثالنا السابق ، يمكن القول من خلال الرسم البياني الأول أن كلا من القيدين الأول والثالث فقط يمران بنقطة الحل الأمثل ومن ثم يمكن اعتبراهما قيودا محددة لنشاط المؤسسة أي أنها **قيود الطاقات النادرة** نظرا للاستغلال الكامل لطاقتهما و الطاقة الغير مستغلة تساوي الصفر لكل منهما.

أما القيد الثاني الذي لا يشارك في تحديد نقطة الحل الأمثل فيمكن اعتباره قيدا غير محدد لنشاط المؤسسة، أي أنها **قيود الطاقات الزائدة أو الفائضة**، نظرا لتوفره على طاقة غير مستغلة تقدر بــ 30 ساعة بعد عملية الإنتاج أو الاستغلال.

و نستخلص مما سبق أن القيد المحدد للنشاط يمثل طاقة أو موردا نادرا يسبب الاستغلال الكلي لطاقته بينما القيد الغير محدد للنشاط يمثل طاقة غير مستغلة بالكامل، أي أن هناك كمية متبقية من الموارد بعد عملية الاستغلال.

إن عملية التفرقة هذه مابين القيود المحددة والغير محددة للنشاط تساعد المسير على اتخاذ قراراته المتعلقة بالإجابة على السؤالين التاليين في ظل الظروف الحالية للإنتاج:

– ما هي الطاقات أو الموارد الواجب زيادتها أو العمل على الحصول على كميات إضافية منها؟

- ما هي الطاقات أو الموارد الواجب تخفيضها أو إيجاد استعمالات أخرى لها وبأي كميات؟

ومن خلال مثالنا السابق، فان المسير سيبذل بدون شك قصارى جهده من أجل زيادة الطاقات المستغلة بالكامل في القسمين (القيدين) الأول والثالث من أجل زيادة الطاقات المستغلة بالكامل في زيادة الإنتاج ومن ثم المبيعات، أما الطاقات الممثلة بالقيود الغير محددة للنشاط، مثل القسم الثاني، فهي توضح الكمية التي يمكن تخفيضها عند الشراء أو التوظيف أو العمل على إيجاد استعمالات بديلة لها في حالة عدم توفر إمكانية زيادة الموارد في القسمين الأول والثالث وهذا بشرط عدم التأثير على الحل الأمثل المتوصل إليه.

و بالإضافة إلى النوعين السابقين من القيود، يمكن أن نواجه في بعض الأحيان أنواع أخرى من القيود، أهمها:

1. **القيود الزائدة عن الحاجة:**

إن وجود هذه القيود وحذفها لن يكون له أي تأثير على منطقة الحلول الممكنة وعلى نقطة الحل الأمثل، وهذا عكس القيود السابقة التي في حالة حذف أحدها أو تغيير مقدارها سيؤدي إلى تغيير مساحة منطقة الحلول الممكنة بالإضافة إلى تغير نقطة الحل الأمثل أحيانا.

ففي المثال السابق، لو توفر لدينا قيد إضافي رابع كالتالي: $2X_1+3X_2 \leq 240$ فعند رسم خط هذا القيد على الرسم البياني نلاحظ أنه لا يشارك لا في تحديد منطقة الحلول الممكنة و لا في نقطة الحل الأمثل، ومن ثم يمكن اعتبار هذا القيد زائد عن الحاجة وحذفه لن يؤثر على المسألة إطلاقا، وسبب وجوده يكون بشكل أساسي سوء صياغة المسألة.

2. أما النوع الأخير من القيود فيمكن أن نطلق عليها **اسم قيود المبيعات**

في المثال السابق افترضنا أن كل ما يتم إنتاجه يتم بيعه، لكن هذا ليس حقيقة بشكل عام، حيث تتوفر أحيانا قيود على الكميات الممكن بيعها، وقد تكون بالشكل التالي:

- أنه لا بمكن بيع أكثر من كمية معينة أو محددة من منتوج معين.
- أنه لا يجب أن يتم بيع كمية لا تقل عن كمية معينة من منتوج معين حتى يتم تحقيق بعض الأهداف المتعلقة بالتكاليف مثلا.

إن هذه الشروط يجب إدراجها ضمن قيود المسألة و يصبح الأمر ليس متعلقا بالكميات الواجب إنتاجها فقط وإنما أيضا يجب الخضوع لقيود السوق و الطلبيات من العملاء.

فإذا ما قدم قسم التسويق في المؤسسة السابقة معلومات تفيد أنه لا يمكن بيع أكثر من 60 وحدة منتوج من الطاولات وفي نفس الوقت ولأسباب معينة يجب بيع 20 وحدة منتوج على الأقل من الكراسي، عندئذ تكون الصيغة العامة لهذه القيود كما يلي:

- يجب إنتاج وبيع 60 وحدة من الطاولات على الأكثر أي أن القيد يكون كما يلي:

$$X_1 \leq 60$$

- يجب إنتاج وبيع 20 وحدة من الكراسي على الأقل، فيكون هذا القيد كما يلي :

$$X_2 \geq 20$$

ونلاحظ أن هذه الشروط الجديدة لا تؤثر على الحل الأمثل السابق لأنه تمثل في إنتاج وبيع 50 طاولة وهو ما يحقق شرط الحد الأقصى لمبيعات الطاولات (60) ، بالإضافة إلى إنتاج وبيع 20 كرسي على الأقل وهو ما يحقق أيضا شرط الحد الأدنى الواجب بيعه من الكراسي والمقدر بـــ 20 كرسي.

أما إذا استثنينا القيدين السابقين الإضافيين من المسألة السابقة، وتوفرت لدينا معلومات أخرى تؤكد أنه يجب إنتاج وبيع 35 وحدة منتوج على الأقل من الكراسي فإن ذلك القيد سيؤثر على الحل الأمثل حيث يصبح مقدار عدد الطاولات (X_1) في الحل الأمثل يساو 30 طاولة وعدد الكراسي (X_2) يساوي 35 وتتغير قيمة دالة الهدف فتصبح 1600دج فقط، أي أن تكلفة القيد الجديد تقدر بـــ $(1900 - 1600) = 300$دج.

وفي الأخير يجب الإشارة إلى أن القيود من نوع "**على الأكثر**" والتي تحدد الحد الأقصى الواجب عدم تجاوزه قد تؤدي إلى استعمال أقل للموارد المتاحة في حالة إنتاج منتوجين فقط، أما القيود التي تكون من نوع "**على الأقل**" والتي تحدد الحد الأدنى الواجب عدم النزول عنه، فإنها لا يمكن تلبيتها بالإمكانيات الحالية وتتطلب موارد كبيرة يجب العمل على زيادتها.

أهم النقاط الواجب استيعابها عند حل مسائل التعظيم Max بالطريقة البيانية:

- تكون منطقة الحلول الممكنة محددة من طرف مختلف الجهات.
- يكون الحل الأمثل في أبعد نقطة من منطقة الحلول الممكنة عن نقطة الأصل (الصفر).
- القيود التي تلعب دورا أساسيا في تحديد نقطة الحل الأمثل هي القيود الفعالة أو المحددة لنشاط المؤسسة.

ثانيا: الطريقة البيانية حالة التخفيض Minimisation

يتشابه حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية في حالة مسائل التخفيض (تخفيض التكاليف، المسافات...الخ) مع استخدامها في حالة مسائل التعظيم كما سبق الإشارة إليها في الحالة السابقة، إلا أن هناك فارق وحيد يتمثل في أننا نهدف إلى إيجاد أقل قيمة ممكنة لدالة الهدف كما أننا نتعامل مع قيود من نوع أكبر أو تساوي وبذلك سيكون الاختلاف في تحديد منطقة الحلول الممكنة بالإضافة إلى تحديد نقطة الحل الأمثل.

مثال: أرادت إحدى المزارع اقتناء علف لماشيتها يتكون أساسا من ثلاثة عناصر تغذية هي العناصر: M, L,K. وتتواجد هذه العناصر في نوعين من الأعلاف هي الشعير (A) والتبن (B) بمقادير مختلفة كما هو موضح أدناه:

العناصر	وحدة من A تحتوي على	وحدة من B تحتوي على
العنصر K	0.1	-
العنصر L	-	0.1
العنصر M	0.2	0.1

و قدر البيطري أن الماشية يجب أن تستهلك يوميا على الأقل 0.4 وحدة من العنصر K و0.6 وحدة من العنصر L و1.6 وحدة من العنصر M. في حين تقدر تكلفة الوحدة من العلف A بـــ 100 دج ومن العلف B 40 دج.

المطلوب: تحديد الكميات الواجب استعمالها يوميات للماشية من العلف من أجل تغذيتها بأقل تكلفة ممكنة؟

الحل:

1- تشكيل النموذج الرياضي

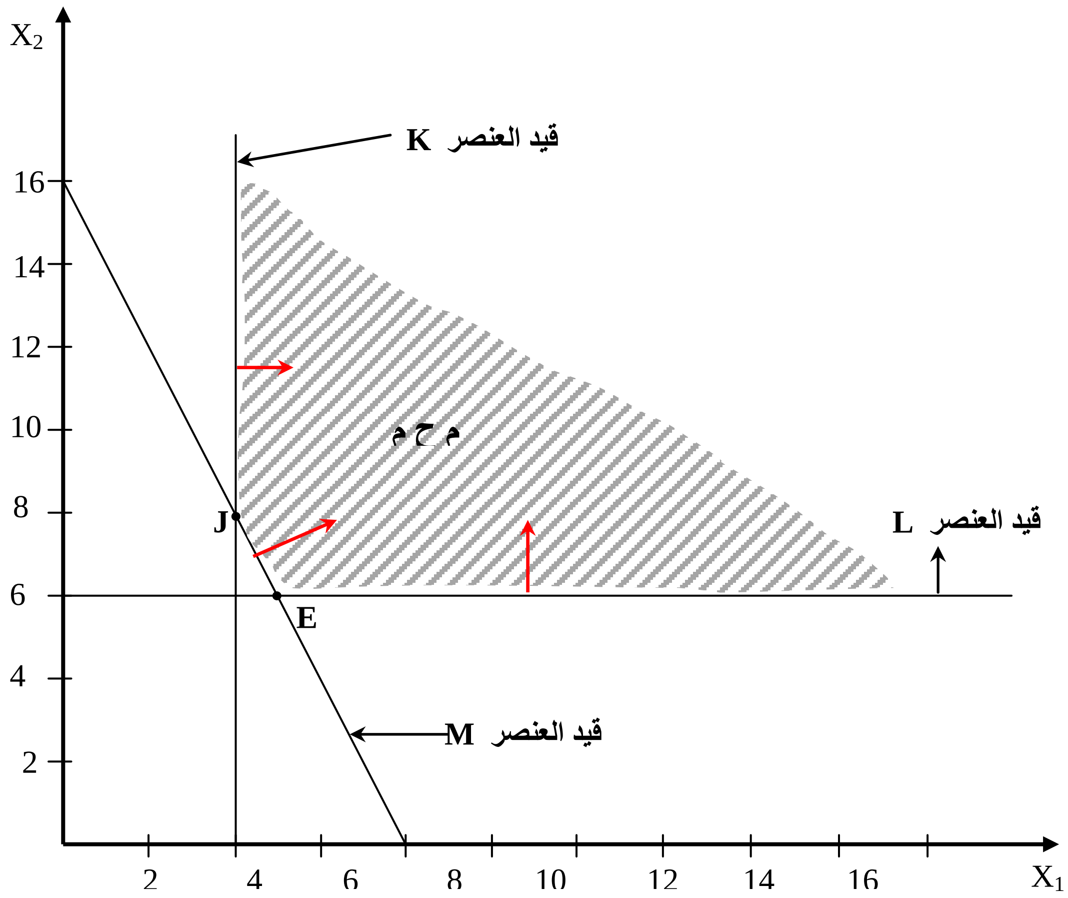
- نرمز ب ـــ X_1 لكمية العلف(عدد الوحدات)من A الواجب استعمالها يوميا.
- نرمز ب X_2 لكمية العلف (عدد الوحدات) من B الواجب استعمالها يوميا.

دالة الهدف: $Min\ (w) = 100\ X_1 + 40X_2$

القيود:
- قيد العنصر K: $0.1\ X_1 \geq 0.4$
- قيد العنصر L: $0.1\ X_2 \geq 0.6$
- قيد العنصر M: $0.2\ X_1 + 0.1X_2 \geq 1.6$

شرط عدم السلبية: $X_1 , X_2 \geq 0$

عندئذ يمكن رسم القيود على الرسم البياني(بضربها في 10 للتخلص من الفاصلة) كما يلي:



رسم بياني رقم 3

نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة غير محددة من الأعلى ومن ثم يوجد عدد غير منته من الحلول في منطقة الحلول الممكنة.

فإذا كانت الخلاصة في مسائل التعظيم أن الحل الأمثل يتواجد دائما في أبعد نقطة عن الأصل، فإن الأمر في مسائل التخفيض معاكس تماما حيث يتواجد الحل الأمثل دائما في أقرب نقطة إلى الأصل ضمن منطقة الحلول الممكنة لأنها تعطينا أقل قيمة ممكنة لدالة الهدف، ولذلك نركز على دراسة النقطتين E,J لتحديد نقطة الحل الأمثل:

النقطة	X_1	X_2	W
J وهي حاصل تقاطع القيدين الأول والثالث	4	8	720
E وهي حاصل تقاطع القيدين الثاني والثالث	5	6	740

من خلال هذا الحل نلاحظ أن أقل تكلفة ستكون عند النقطة " J "حيث تكون الكميات الواجب استعمالها من العلف A هي 4 وحدات ومن العلف B هي 8 وحدات. وتكون التكلفة الكلية في حدها الأدنى بمقدار 720 دج فقط.

أو: بما أننا ضربنا الأرقام في 10 فتكون X_1 = 0.4 وحدة و X_2 = 0.8 وحدة والتكلفة الدنيا 72 دج.و

يمكن التحقق من الحل بالتعويض في القيود و دالة الهدف.

عيوب الطريقة البيانية:

1. ليس بإمكانها حل المسائل المعقدة، تركز فقط على المسائل ذات متغيرين فقط .
2. قراءة النتائج على الرسم البياني قد تكون غير دقيقة.

ثالثا: حالات خاصة من الطريقة البيانية

1. حالة الحلول المتعددة Cas de solutions multiples

مثال:

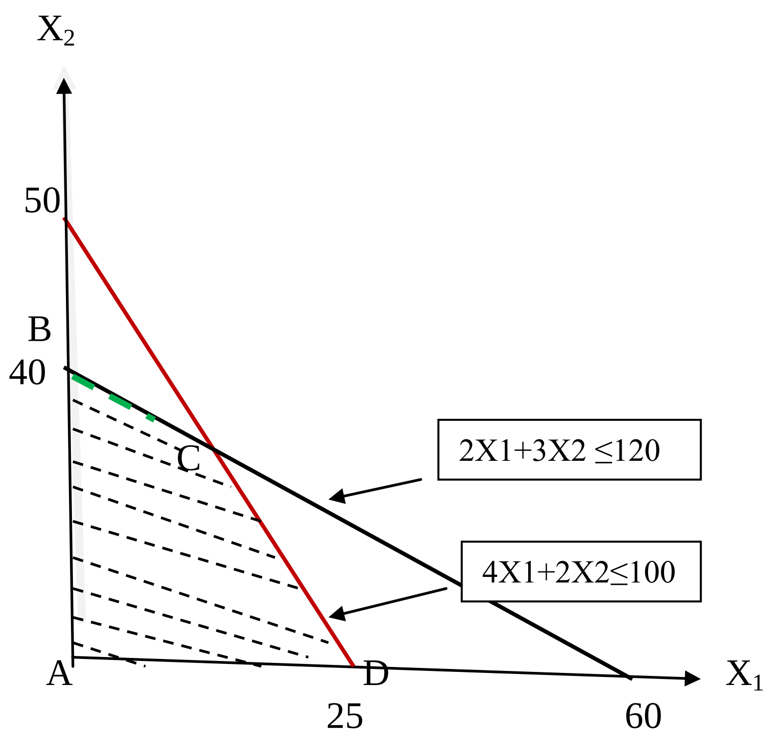
Max (z) = $4X_1 + 6X_2$ دالة الهدف

$2X1 + 3X2 \leq 120$ قيد المواد الأولية

$4X1 + 2X2 \leq 100$ قيد ساعات العمل

$X1 , X2 \geq 0$

بحل هذه المسألة بيانيا كما سبق الإشارة إليه نتوصل إلى الرسم البياني و جدول منطقة الحلول الممكنة التاليين:



رسم بياني رقم 4

Z =	X2	X1	النقطة
0	0	0	A
240	40	0	B
240	35	7.5	C
100	0	25	D

نلاحظ أنه عند النقطة B على الرسم البياني أن $X_1 = 0$ و $X_2 = 40$ و $Z = 240$ كما نلاحظ أنه عند النقطة C : $X_1 = 7.5$ و $X_2 = 35$ و $Z = 240$. و تظهر لنا الطريقة البيانية الركنين B ، C كحلين أمثلين إضافة إلى جميع النقاط الواقعة على الخط B – C حيث أن أي نقطة على هذا الخط تعطي نفس الربح المحقق على الركنين B , C أي أن عدد الحلول المثلى لهذه المسألة هو بعدد نقاط الخط الذي يربط النقطتين B و C و بذلك يمكن القول أن لهذه المسألة عدة حلول مثلى بديلة.

و من جهة أخرى يمكن إثبات ذلك عن طريق رسم خطوط دالة الهدف. فإذا افترضنا أن $Z= 240$ مثلا عندئذ تكون دالة الهدف كما يلي : $4X_1+6X_2 = 240$

و عند وضع X_1 مساويا للصفر فإن $X_2 = 40$. أما عند وضع $X_2 = 0$ فإن $X_1 = 60$. و برسم هذه الإحداثيات الخاصة بدالة الهدف على الرسم البياني نجد أن هذا الخط ينطبق تماما على خط قيد المواد الأولية (القيد الأول) و من ثم فإن النقاط الواقعة على خط هذا القيد و المشاركة في تحديد منطقة الحلول الممكنة هي نقاط تعطي كلها حلا أمثلا أي الخط C-B في الرسم البياني أعلاه .

و في الأخير و كنتيجة لهذه الحلول المثلى المتعددة يمكن للمسير أن يطرح العديد من الأسئلة التي يجب أن يجيب عليها قبل اختيار أي حل و من أمثلة هذه الأسئلة :

– إلى ماذا يؤدي التركيز على إنتاج كميات من المنتوج الثاني فقط و إهمال إنتاج أية كمية من المنتوج الأول (الحل الأمثل الأول)؟

– ما هي الفائدة التي ستجنيها المؤسسة عند إبقاء 20 ساعة غير مستغلة عند اختيار الحل الأمثل الأول؟

– ماذا يعني استهلاك جميع الطاقات المتاحة و إنتاج كميات محددة من المنتوجين (الحل الأمثل الثاني) أي تنويع الإنتاج بدلا من التركيز على منتوج واحد من الناحية التسويقية إلى غير ذلك من الأسئلة المختلفة؟

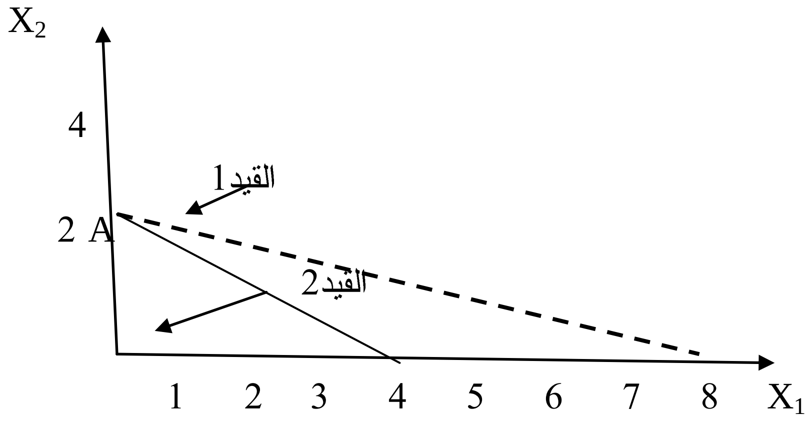
2.حالة عدم الإنتظام

مثال :

ليكن المثال التالي :

$$\begin{aligned} Max(z) &= 3X_1 + 9X_2 \\ X_1 + 4X_2 &\le 8 \\ X_1 + 2X_2 &\le 4 \\ X_1 ,\ X_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

يكون الحل البياني كما يلي



رسم بياني رقم 5

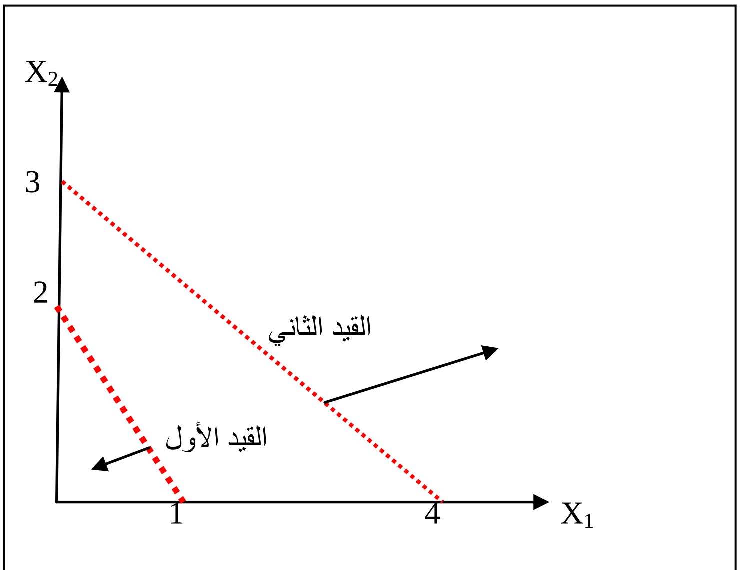
بالنظر الى الرسم البياني و نقطة الحل الأمثل المتمثلة في النقطة A حيث $X_2= 2, X_1=0$ فانه يمكن القول أن نقطة الحل الأمثل قد بولغ في تحديدها حيث نحتاج إلى تقاطع خطين فقط لتحديدها و بالتالي يوجد قيد زائد يمكن الاستغناء عنه و هو القيد الأول ، و قد يعود وجود هذا النوع من القيود إلى عدم الدقة في صياغة المسألة. و يمكن مقارنة هذه الحل مع نفس الحل المحصل عليه في الحالات الخاصة بطريقة السمبلكس لاحقا.

3.حالة مسالة بدون حل ممكن

نقول عادة انه لا يوجد حل ممكن للمسالة إذا لم يتم تحقيق جميع قيود المسالة. و لا يمكن لهذا النوع من المشاكل أن يظهر اذا ما كانت كل قيود المسالة من نوع اصغر أو يساوي لان متغيرات الفروق تعطي دائما حلا ممكنا. لكن في حالة استعمال قيود من نوع اكبر أو تساوي فالأمر مختلف وقد لا نتحصل على حل للمسألة. و ينتج ذلك عادة عن سوء صياغة المسالة حيث تكون القيود عادة متضاربة أو متعاكسة و هذا ما يمكن ملاحظته من الحل البياني للنموذج الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} \text{Max } (z) &= 3X_1 + 2X_2 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 2 \\ 3X_1 + 4X_2 &\geq 12 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

من خلال الحل البياني لهذه المسالة، نرى بشكل جلي تناقض قيود المسالة حيث لا توجد أي منطقة أو نقطة مشتركة بينهما.



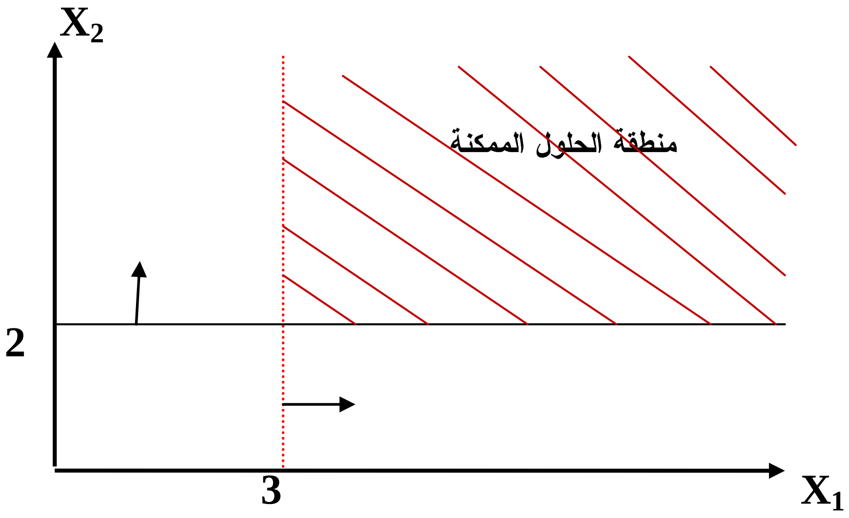
رسم بياني رقم 6

4.حالة مسالة بدون حل أمثل محدد

هناك بعض مسائل البرمجة الخطية التي لا يمكن التوصل فيها إلى حل نهائي حيث يمكن زيادة قيمة بعض المتغيرات إلى ما لا نهاية بدون خرق أي قيد من قيود المسالة. و معنى ذلك أن منطقة الحلول الممكنة غير محددة من جهة واحدة على الأقل ، الأمر الذي سيترتب عنه زيادة دالة الهدف (في حالة التعظيم) أو ستنخفض (في حالة التخفيض) بدون حدود ، عندئذ يمكن القول أن كلا من منطقة الحلول الممكنة و القيمة المثلى لدالة الهدف غير محددان . و يمكن أن تشير حالة عدم وجود حدود هذه إلى أن المسالة غير مشكلة بشكل جيد حيث انه من المستحيل أن يكون هناك نموذج أو مسالة تعطي ما لا نهاية من الربح مثلا. و من المؤكد أن سبب ظهور هذه الحالة هو عدم مراعاة واحدا أو أكثر من القيود المحددة للنشاط أو انه لم يتم تقدير قيمة أو كمية الطاقات المتاحة أو الثوابت (الطرف الأيمن من القيد) بشكل جيد.

مثال

$$\begin{aligned} \text{Max } (z) &= 3X_1 + 2X_2 \\ X_1 \quad &\geq 3 \\ X_2 &\geq 2 \\ X_1 ,\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



رسم بياني رقم 7

نلاحظ أن منطقة الحلول غير محددة من الأعلى و بذلك يمكن زيادة قيم X_1 و X_2 إلى ما لا نهاية بدون خرق أي قيد من قيود المسالة و من ثم فان دالة الهدف ستزداد بدون حدود. عندئذ يمكن القول أن كلا من منطقة الحلول الممكنة و القيمة المثلى لدالة الهدف غير محددان. و ترجع هذه الحالة عادة إلى سوء صياغة المسالة و إهمال بعض القيود.

تمارين الطريقة البيانية

تمرين رقم 1

تنتج المؤسسة الوطنية للطلاء نوعين من المنتوجات، طلاء زيتي و آخر مائي باستعمال مادتين أوليتين أ،ب حيث تقد ر الكميات المتوفرة منهما ب 6000 كغ و 8000 كغ على التوالي. أما إحتياجات المنتوجين من هذه المواد فهو كما يلي:

	كمية المواد الأولية اللازمة لكل طن من الطلاء	
	الزيتي	**المائي**
المادة الأولية أ	**100 كلغ**	**200 كلغ**
= = ب	**200 كلغ**	**100 كلغ**

أما قسم التسويق ,فقد حدد من خلال دراسة السوق أن أقصى كمية يمكن بيعها من الطلاء المائي تقدر بـ 2000 كلغ و بسعر 20 دج للكلغ. أما الطلاء الزيتي فسوف يباع بـ 30 دج للكلغ.

المطلوب:

1- ما هي الكمية الواجب إنتاجها و بيعها من المنتوجين من أجل تحقيق أقصى مبيعات للمؤسسة ؟

2-ما هو عدد الحلول الممكنة الذي بإمكاننا الحصول عليه في هذه المسألة ؟

3-ليكن الحل $X_1 = 2,\ X_2 = 2$ أوجد الكميات الغير مستعملة من المادتين الأوليتين.

4-**ابحث عما إذا كانت الحلول التالية ممكنة:**

$(X_1=1\ ,\ X_2 = 4\ ),\ (\ X_1 = 2\ ,X_2 = 2)\ ,\ (\ X_1 = 2\ ,\ X_2 = -2)\ ,\ (\ X_1= ¾\ ,\ X_2= ¾\ )$
$.\ (\ X_1 = 10/\ 3\ ,\ \ X_2\ = 4/\ 3\ )\ ,\ (\ X_1 = 2\ ,\ X_2 = -1)\ ,$

5-أكتب قيود المسألة السابقة و أوجد الحل الأمثل من جديد لكل حالة إذا ما توفرت البيانات الإضافية التالية:

أ) – إستعمال المادة الأولية " أ " يساوي 6000 كغ على الأكثر و 3000 كغ على الأقل.

ب)-الطلب على الطلاء المائي يقدر بـ 2000 كغ على الأقل.

ج)- الكميات المتاحة من المادة الأولية " ب " تقدر بـ 8000 كغ على الأقل.

6-أوجد نقطة الحل الأمثل للمسألة الأصلية إذا ما تغيرت دالة الهدف كل مرة إلى ما يلي:

$Z_3 = 3\ X_1 + 1.5\ X_2 \quad , \quad Z_2 = X_1 + 3\ X_2 \quad , \quad Z_1 = 3\ X_1 + X_2$

7) –أوجد المساحة الممثلة للحل إضافة إلى نقطة الحل الأمثل لكل حالة إذا ما قمنا بالتغييرات التالية كل على حدة . افرض أن المعلومات الأخرى تبقى كما هي بدون تغيير.(أنظر إلى الرسم البياني للإجابة).

1- الحد الأقصى للطلب على الطلاء الداخلي هو 3000 كغ في اليوم

2- الطلب على الطلاء الداخلي يساوي على الأقل 2000 كغ في اليوم.

3- الكميات المتاحة من المادة " ب" في كل يوم تساوي 8000 كغ على الأقل.

تمرين2:

تقوم شركة "سايكو" بصناعة نوعين من الساعات واحدة للرجال و الأخرى للنساء من أجل تسويقها أثناء المناسبات و الأعياد ، و تقدر الشركة أقصى كمية يمكن بيعها بـــ8000 ساعة رجال 6000 ساعة نساء . إلا أن طاقة الشركة الإنتاجية في الوقت الحاضر لا تسمح لها بإنتاج أكثر من 10000 ساعة مهما كان نوعها . مع العلم أن الشركة تستعمل نفس الآلات و الفنيين في صناعة الساعات.

المطلوب:

1–أكتب ثم أرسم قيود هذه المسألة على الرسم البياني و أوجد منطقة الحلول الممكنة و نقطة الحل الأمثل مع العلم أن الشركة تهدف إلى تعظيم أرباح المتمثلة في 20 دج عن كل ساعة رجال و 30دج عن كل ساعة نساء.

2–يطلب المدير منك توضيح ما إذا كانت البرامج الإنتاجية التالية تحقق قيود الإنتاج و التسويق أم لا:

البرنامج أ – كمية ساعات الرجال =5000 كمية ساعات النساء =6000

البرنامج ب– كمية ساعات الرجال =3000 كمية ساعات النساء =6000

البرنامج ج – كمية ساعات الرجال =5000 كمية ساعات النساء =5000

البرنامج د – كمية ساعات الرجال =3000 كمية ساعات النساء =3000

3 – في ظل المعطيات السابقة في المسألة، شكل المسألة من جديد إذا توفرت لديك المعطيات التالية:

–أقصى كمية يمكن بيعها من ساعات الرجال 8000 لكن ليس أقل من 5000

–أن كمية ساعات النساء يجب أن تكون ضعف كمية ساعات الرجال.

تمرين3:

تنتج المؤسسة الوطنية للأجهزة الكهربائية ثلاثة منتجات تتمثل في ثلاجات و مكيفات و سخانات حيث يمر كل منها على قسمي التصنيع و التجميع.و قدرت الطاقة الإنتاجية المتاحة و متطلبات الإنتاج للمنتجات الثلاثة كما يلي:

القسم	الطاقة المتاحة	الوقت اللازم لإنتاج		
		ثلاجة	مكيف	سخان
التصنيع	28500 ساعة	3سا	2سا	3سا
التجميع	36000 ساعة	3سا	4سا	2سا

هذا و قد أظهرت دراسة السوق التي قامت بها المؤسسة أن الحد الأقصى للطلب على الثلاجات يقدر بـ 400 وحدة و لا يوجد أي قيد بالنسبة للمنتجات الأخرى.كما أن الربح المحقق من كل منتوج فيقـــدر بـ 1500دج للثلاجة و 1800دج للمكيف و1200 دج للسخان.

المطلوب:تحديد الكميات الواجب إنتاجها لتعظيم الأرباح ثم تحديد الطاقة الغير مستغلة وماذا تقتـــرح بشأنها؟

تمرين 4 :

أولا: أوجد منطقة الحلول الممكنة و نقطة الحل الأمثل باستعمال الطريقة البيانية للمسائل التالية:

1. $\text{Min } (w) = 15X_1 + 10X_2$

$$
\begin{aligned}
60X_1 + 60X_2 &\le 3600 \\
75X_1 + 100X_2 &\ge 3000 \\
X_1 &= 30 \\
X_2 &\ge 30 \\
X_1 ,\ X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

2. $\text{Min } (w) = 10X_1 + 16X_1$

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 &= 800 \\
X_1 &\ge 150 \\
X_2 &\le 250 \\
X_1 ,\ X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

تمرين 5

أوجد الحل الأمثل باستعمال الطريقة البيانية وحدد الموارد غير المستغلة للمسألة التالية.

$\text{MAX } (Z) = 6X_1 + 4X_2$

$2X_1 + 3X_2 \le$ **120 طن**

$4X_1 + 2X_2 \le$ **100 ساعة**

$X_1 = 10$ **قيد السوق:**

$X_2 \ge 15$

$X_1 , X_2 \ge 0$

تمرين 6

أوجد منطقة الحلول الممكنة و نقطة الحل الأمثل للمسألة التالية باستعمال الطريقة البيانية و اوجد حلا بديلا حالة وجوده.

$\text{Max } (Z)= 180X_1 +340X_2$

$$
\begin{aligned}
X_1 &\le 30 \\
X_1 + X_2 &\le 54 \\
4X_1 + 7X_2 &\ge 132 \\
X_2 &\ge 12 \\
X_1 , X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

تمرين 7

تخطط بلدية بسكرة لمشروع إسكاني كبير، و خصصت لذلك مبلغ 3600 مليون دينار. و يتمثل هـذا المشروع في بناء فيلات تكلفة الواحدة منها 00 000 48 دج وسوف تؤجرها بسعر 9000دج شهريا بالإضافة إلى بناء شقق تكلفة الواحدة منها 00 000 30 دج سوف تؤجرها بسعر 6000دج شـــهريا. ومن أجل إنجاح المشروع خصصت البلدية مساحة تقدر بـــ 20 هكتار في الجنوب الشرقي من البلدية لعملية البناء. وحتى يكون البناء جذابا و سياحيا فقد اشترطت الوصاية أن لا تتجاوز كثافة البنـــاء 40 فيلا أو 50 شقة في الهكتار الواحد بالإضافة إلى احتواء المشروع على الأقل 200 فيلا و100 شقة للمستثمرين الجدد بالولاية.

المطلوب: باستعمال الطريقة البيانية:

1.- إيجاد عدد السكنات من كلا النوعين الواجب بناؤها من أجل:

- إسكان أكبر عدد ممكن من العائلات (عائلة واحدة في مسكن واحد)
- إسكان أكبر عدد ممكن من الأشخاص بافتراض متوسط 3 أفراد في شقة واحدة و5 أفـراد فـي الفيلا.
- الحصول على أكبر دخل ممكن من الإيجار في كل شهر.

2.- أوجد العدد الإجمالي للعائلات و العدد الإجمالي للأشخاص و الدخل الإجمالي من الإيجار لكـل حالة من الحالات الثلاثة السابقة.

تمرين 8

تخطط مؤسسة النقل الحضري لمدينة باتنة تزويد حضيرتها بنوعين جديدين من الحافلات ،حيث تكلف حافلة من النوع الأول مبلغ 4 مليون دج و تتسع ل 20 راكبا في حين تكلف حافلة من النوع الثـاني مبلغ 6 مليون دج و تتسع ل 50 راكبا.و في اجتماع لمجلس الإدارة ،حدد كل مسؤول بعض الشروط المتعلقة بهذا المشروع وهي كما يلي:

إن الشركة لا تتوفر إلا على مرآب واحد يتسع ل 100 حافلة على الأكثر مهما كان نوعها، كمـا أن القرض الممنوح من البنك محدد بعدم تجاوز مبلغ 480 مليون دج.إضافة إلى ذلك ، فإن تنوع المسالك نحو مختلف الأحياء يتطلب اقتناء على الأقل 30حافلة من النوع الأول و20 حافلة من النوع الثاني.و لكي يكون المشروع ذو مردودية عالية فإن عدد المقاعد الإجمالية الواجب توفيرها يجب أن لا يقل عن 2000 كرسي ، بالإضافة إلى أن عدد الحافلات من النوع الثاني يجب أن لا يقل عن ربع الحـافلات الإجمالية.

المطلوب باستعمال الطريقة البيانية تحديد:

1-أكبر عدد من حافلات النوع الأول.

2-أكبر عدد من المقاعد.

الفصل الرابع

طريقة السمبلكس La méthode du Simplexe

تستخدم طريقة السمبلكس في معالجة المسائل التي لا يمكن حلها بالطريقة البيانية لأن هذه الأخيـــرة لا يمكن أن تستعمل في حل المسائل التي تتوفر على متغيرات عددها أكبـــر مـــن متغيـــرين أي ثلاثـــة متغيرات فأكثر. و لذلك تستخدم طريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة) التي قدمها "**جـــورج دانتزيـــغ George Dantzig**" سنة 1947 لمعالجة مختلف مسائل البرمجة الخطية مهما كان عدد متغيراتها(حتى المسائل ذات المتغيرين).

و تقوم طريقة السمبلكس على فكرة إيجاد التحسن المستمر في دالة الهدف ، أي أننا نبدأ مـــن نقطـــة الأصل (الصفر) و نتحرك في اتجاه تحسين دالة الهدف خطوة خطوة إلى أن نصل إلى الحل الأمثـــل الذي لا يمكن تحسين دالة الهدف بعده على الإطلاق . و تعتمد هذه الطريقة لحـــل مســـائل البرمجـــة الخطية على قاعدة أساسية تم استنتاجها سابقا في الطريقة البيانية و التي تنص على أن أي حل لمسألة البرنامج الخطي سيكون على أحد أركان منطقة الحلول الممكنة ،و بذلك تتجاهل هذه الطريقة الحلـــول الممكنة الأخرى و تركز على الأركان فقط .

ويعتمد استخدام طريقة السمبلكس على مجموعة من الخطوات في شكل جداول تتطلب إجراء عدد من العمليات الحسابية وفق منهجية محددة على هذه الجداول التي تلخص المسألة محل الدراسة ، و التـــي تؤدي في النهاية إلى الحصول على الحل الأمثل حالة وجوده .

و يمكن تلخيص **خطوات الحل بطريقة السمبلكس** فيما يلي :

1- التعبير على المسألة في شكل نموذج رياضي

2-تحويل النموذج الرياضي للمسألة إلى نموذج معياري في حالة مخالفة ذلك .

3- وضع حل أولي مقبول.

4- نقل الحل الأولي المقبول إلى جدول السمبلكس .

5 –إختبار أمثلية الحل المتحصل عليه .

6- تحسين الحل المتوصل إليه في حالة عدم كونه حلا أمثلا.

7- الوصول إلى الحل الأمثل و تفسيره .

و لتطبيق هذه الخطوات سنعمل على الفصل بين حل النموذج الرياضي العام مـــن جهـــة و النمـــوذج الرياضي المختلط من جهة أخرى بسبب وجود بعض الإختلافات الأساسية .

أولا : حالة التعظيم (Maximisation)

1- حالة النموذج الرياضي النظامي

مثال

تقوم شركة الحجار بإنتاج و بيع نوعين من الفولاذ يمر إنتاجهما على ثلاثة أقسام ، و تحقق من خلال ذلك عن الطن الواحد ربحا قدره 300 دج عن النوع الأول و200 دج عن النوع الثاني. و فيما يلي بقية المعلومات المتعلقة بإنتاج طن واحد من كلا النوعين .

	النوع 1	النوع 2	الطاقة المتاحة
	عدد الساعات اللازمة	عدد الساعات اللازمة	
القسم 1	6 سا	6 سا	420 سا
القسم 2	3 سا	6 سا	300 سا
القسم 3	4 سا	2 سا	240 سا

المطلوب : إيجاد البرنامج الإنتاجي الأمثل من نوعي الفولاذ الذي يعظم أرباح المؤسسة ؟

الحل :

الخطوة1: بناء النموذج الرياضي

لحل هذه المسألة نقوم ببناء النموذج الرياضي عن طريق الإجابة على الأسئلة الثلاثة التالية:

- **1-ما هي المجاهيل أو المتغيرات الواجب إيجاد قيم لها ؟**

يبدو من خلال المطلوب أنه يجب تحديد البرنامج الإنتاجي من نوعي الفولاذ، أي الكميات الواجب إنتاجها من كل نوع من الفولاذ.

و لذلك نرمز لكمية أو عدد الأطنان من النوع الأول من الفولاذ ب X_1

كما نرمز لكمية أو عدد الأطنان من النوع الثاني من الفولاذ ب X_2

- **2- ما هو الهدف الذي تريده هذه المؤسسة ؟**

يتمثل هدف هذه المؤسسة في تعظيم أرباحها، و من ثم تكون دالة الهدف كما يلي :

$$\text{Max } (Z) = 300\, X_1 + 200\, X_2$$

- **3- ما هي القيود المفروضة على تحقيق الهدف ؟**

تتمثل القيود المفروضة على تحقيق الهدف في كمية الموارد المتاحة و المتمثلة في عدد الساعات المتاحة في كل قسم، و بذلك فإن قيود هذه المسألة تكون كما يلي:

قيد القسم الأول: $6X_1 + 6X_2 \leq 420$

قيد القسم الثاني: $3X_1 + 6X_2 \leq 300$

قيد القسم الثالث: $4X_1 + 2X_2 \leq 240$

شرط عدم سلبية المتغيرات: $X_1 , X_2 \geq 0$

نلاحظ أن النموذج الرياضي أعلاه هو نموذج عام أو نظامي حيث دالة الهدف في حالة تعظيم و جميع قيود المسألة من نوع أقل أو تساوي.

بعد بنا ء النموذج الرياضي لهذه المسألة نعتمد على الخطوات التالية لحلها بطريقة السمبلكس.

الخطوة 2- تحويل النموذج الرياضي للمسألة إلى نموذج معياري

بما أن القيود من نوع أقل أو تساوي فإنه يتم تحويلها من متراجحات إلى معادلات بإضافة متغيرات الفروق إلى الطرف الأيسر من القيد . و يمثل متغير الفروق الفرق بين الطاقة المتاحة و الطاقة المستغلة ،أي أنه يمثل أية طاقة غير مستغلة و نرمز له في هذه الحالة بالرمز" S " عندئذ تصبح القيود كما يلي :

القيد الأول: $6X_1 + 6X_2 + S_1 = 420$

القيد الثاني: $3X_1 + 6X_2 + S_2 = 300$

القيد الثالث: $6X_1 + 6X_2 + S_3 = 240$

شرط عدم سلبية المتغيرات: $X_1 , X_2, S_1, S_2 , S_3 \geq 0$

أما الربح الناتج عن متغيرات الفروق فهو يساوي الصفر، و بذلك يمكن كتابة دالة الهدف كما يلي:

$$\text{Max } (Z) = 300 X_1 + 200 X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3$$

ملاحظات هامة:

- قد تكون المتغيرات في أية مسألة مقيدة (تخضع لشرط عدم السلبية) كما قد تكون أحيانا غير مقيدة (حرة) و الشكل القياسي (المعياري) للنموذج الرياضي هو أن تكون هذه المتغيرات مقيدة ، و لذلك فإن المتغيرات غير المقيدة تتطلب تحويلها إلى متغيرات مقيدة و ذلك وفق القاعدة التالية :

" إن أي متغير غير مقيد يعبر عنه في المسألة بالفرق بين متغيرين غير سالبين ".

- **الجانب الأيمن من القيود في النموذج المعياري**

يقصد بالجانب الأيمن من القيود أي الثوابت ، الأرقام التي تعكس كمية الموارد المتاحة و التي يجب أن تكون موجبة أو مساوية للصفر ، و في الحالة العكسية (أي وجود ثوابت سالبة) يجب تحويلها إلى قيم موجبة عن طريق ضرب طرفي المتراجحة في (1 -) و عكس إشارة المتراجحة أي أكبر أو تساوي تصبح أصغر أو تساوي و العكس صحيح .

الخطوة 3- إيجاد حل أولي مقبول

لإيجاد حل أولي مقبول يمكن أن نفرض حالة ألالإنتاج أي عدم وجود أي إنتاج ، أي أن X_1 (كمية المنتوج الأول) و X_2 (كمية المنتوج الثاني) تساوي الصفر عندئذ يكون الحل الأولي كما يلي :

القيد الأول: $420 = S_1$

القيد الثاني: $300 = S_2$

القيد الثالث: $240 = S_3$

دالة الهدف " Z " : بتعويض قيم X_1 و X_2 المساوية للصفر في دالة الهدف نجـــدها تســـاوي الصفر لأنه لم يتم إنتاج و بيع أية كمية من المنتوجين و من ثم لم يتم تحقيق أي ربح .

و بما أنه لا يوجد أي خلل في هذا الحل الأولي (مثل وجود قيم سالبة أو قيم غير منطقية... الـــخ) فهو يعتبر حلا أوليا مقبولا و يمكن نقله لجدول السمبلكس كما هو موضح في الخطوة التالية .

الخطوة 4 نقل معطيات الحل الأولي و النموذج الرياضي إلى جدول السمبلكس

يجب الإشارة هنا أن هناك أشكال مختلفة لرسم جداول السمبلكس و كلها تؤدي نفس الغرض ، و سنتبع إحداها و التي نراها مناسبة و توفر أكبر قدر من المعلومات.

الجدول رقم 1:

المتغير الخارج

المتغير الداخل

1	2	3	4	5	6	7	8	
ربح/وحدة C	متغيرات الحل V	الكمية Q	X_1 30	X_2 20	S_1 0	S_2 0	S_3 0	A B
0	S_1	420	6	6	1	0	0	C
0	S_2	300	3	6	0	1	0	D
0	S_3	240	4	2	0	0	1	E
Z = 0			0	0	0	0	0	F
			30	20	0	0	0	G

نلاحظ أن:

- **نتائج الصف F**: هي عبارة عن ضرب و جمع الأرقام الموجودة في العمود 1 في الأرقـــام الموجودة في كل عمود من الأعمدة 4 ، 5 ، 6، 7، 8 على التوالي. فمثلا نتيجـــة الصـــفر الموجودة في تقاطع الصف F مع العمود 4 هي حاصل ضرب و جمع العمليات التالية :(0 * 6)+(0 * 3)+(0 * 4) =0 و نفس الشيء بالنسبة لبقية الأعمدة .

- **نتائج الصف الأخير G** : فهي نتيجة طرح النتائج المحصل عليها في الصف F من الأرقام الموجودة في الصف B في كل عمود . فمثلا الرقم 30 في تقاطع العمود 4 مع الصف G هي حاصل عملية الطرح $30 - 0 = 30$.
- **نتيجة دالة الهدف** " **Z** ": فهي ناتجة من ضرب الأرقام في العمود 1 (عمود ربح الوحدة) في الأرقام الموجودة في عمود 3 (عمود الكمية).

الخطوة 5: اختبار أمثليه الحل المتوصل إليه

نتوصل إلى الحل الأمثل في حالة التعظيم Max عندما تكون جميع قيم السطر الأخير سالبة أو معدومة. و بما أن قيم السطر الأخير في الجدول السابق ليست كلها سالبة أو معدومة فإننا لم نتوصل إلى الحل الأمثل بعد و لا بد من عملية تحسين الحل.

الخطوة 6: تحسين الحل

بما أن الحل الأولي لا يحقق أية أرباح للمؤسسة ، فلا بد من تحسين ذلك الحل و يتم تحقيق أرباح عن طريق إنتاج أحد المنتوجات أولا و بيعه . وللقيام بذلك ،تتضمن عملية التحسين ما يلي :

أ) إيجاد المتغير الداخل للحل أي إيجاد المنتوج الواجب إنتاجه في بداية الحل :

في حالة التعظيم MAX ، يتم إيجاد المتغير الداخل عن طريق اختيار أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير من الجدول لأنها تحقق ربحا أكبر. و يمكن ملاحظة عمود المتغير X_1 أن له ربحا للوحدة يقدر ب 30 دج و بذلك يكون المتغير الداخل إلى الحل هو X_1 و يسمى عموده **بعمود المحور**.

ب) إيجاد المتغير الخارج من الحل :

إن دخول المتغير X_1 للحل يتطلب إخراج أحد المتغيرات من الحل الأولي السابق بحيث تصبح قيمته مساوية للصفر. و يتم إيجاد المتغير الخارج عن طريق تقسيم القيم الموجودة في عمود الكمية على المعاملات (الأرقام) المقابلة لها في عمود المحور ثم نختار أصغر حاصل قسمة لأنه يحقق جميع قيود المسألة. و يعرف ذلك الصف **بصف المحور**.

صف S_1 : $420 \div 6 = 70$

صف S2 : $300 \div 3 = 100$

صف S_3 : $240 \div 4 = 60$

إن أصغر حاصل قسمة هو 60 و بذلك يمكن القول أن المتغير **S_3** هو المتغير الخارج من الحل و الذي سيحل محله في جدول التحسين التالي المتغير الداخل **X_1** .

<u>ملاحظة</u>: إن الغرض من اختيار أصغر حاصل قسمة هو اختيار الكمية الممكن إنتاجها من طرف مختلف أقسام المؤسسة و هو 60 وحدة منتوج أي أن هذه الكمية تحقق جميع قيود المسألة و يمكن التأكد من ذلك بتعويض مختلف نتائج القسمة في مختلف القيود.

كما يطلق على نقطة تقاطع عمود المحور(عمود X_1) مع صف المحور (صف S_3) **بنقطة المحور و هي تساوي 4 .**

ج)- إيجاد معادلة المتغير الداخل في الجدول الجديد

يأخذ المتغير الداخل X_1 مكانه في الجدول الجديد محل المتغير الخارج S_3، و يأخذ صفه قيما جديـــدة يمكن حسابها عن طريق **قسمة كل قيمة في صف المحور على نقطة المحور في الجدول الســـابق**. و بذلك تكون قيم الصف الجديد كما يلي:

عمود الكمية رقم 3	**4 ÷ 240**	**60 =**
العمود رقم 4	**4 ÷ 4**	**1 =**
العمود رقم 5	**4 ÷ 2**	**1/2 =**
العمود رقم 6	**4 ÷ 0**	**0 =**
العمود رقم 7	**4 ÷ 0**	**0 =**
العمود رقم 8	**4 ÷ 1**	**1/4 =**

د) حساب القيم الجديدة للصفوف المتبقية

يتم حساب قيم الصفوف المتبقية باستعمال العلاقة التالية:

القيمة الجديدة = القيمة القديمة – (القيمة المقابلة لها في صف المحور x القيمة المقابلة لها في عمود المحور)

نقطة المحور

		القيمة القديمة		نقطة المحور	القيمة الجديدة
قيم العمود 3	**الصف الأول**	420	÷ (6 × 240) –	4	60 =
	الصف الثاني	300	÷ (3 × 240) –	4	120 =
قيم العمود 4	**الصف الأول**	6	÷ (6 × 4) –	4	0 =
	الصف الثاني	3	÷ (3 × 4) –	4	0 =
قيم العمود 5	**الصف الأول**	6	÷ (6 × 2) –	4	3 =
	الصف الثاني	6	÷ (3 × 2) –	4	9/2 =
قيم العمود 6	**الصف الأول**	1	÷ (6 × 0) –	4	0 =
	الصف الثاني	0	÷ (3 × 0) –	4	1 =
قيم العمود 7	**الصف الأول**	0	÷ (6 × 0) –	4	0 =
	الصف الثاني	1	÷ (3 × 0) –	4	1 =
قيم العمود 8	**الصف الأول**	0	÷ (6 × 1) –	4	3/2 - =
	الصف الثاني	0	÷ (3 × 1) –	4	¾ - =

بعد حساب مختلف القيم الجديدة يمكن إظهار عملية التحسين في جدول جديد كما يلي :

الجدول رقم 2

المتغير الخارج

المتغير الداخل

1	2	3	4	5	6	7	8	
			X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A
C	V	Q	30	20	0	0	0	B
0	S_1	60	0	3	1	0	-3/2	C
0	S_2	120	0	9/2	0	1	- 3/4	D
30	X_1	60	1	1/2	0	0	1/4	E
Z =		1800	30	15	0	0	7.5	F
	C - Z		0	5	0	0	- 7.5	G

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف (Z) أصبحت تساوي 1800 دج عن طريق إنتاج 60 طن من النوع الأول ($X_1= 60$) و بقاء 60 ساعة غير مستغلة في القسم الأول ($S_1= 60$) و كذلك 120 ساعة غير مستغلة في القسم الثاني($S_2 = 120$) .

نعود إلى الخطوة رقم 5 و المتعلقة باختبار أمثلية الحل المتوصل إليه، فنلاحظ أن هناك قيمة موجبة في السطر الأخير من الجدول و بالتالي لم نتوصل إلى الحل الأمثل بعد و لا بد من مواصلة عملية التحسين.

الخطوة السابعة : الوصول إلى الحل الأمثل

يمكن اتباع نفس الخطوات السابق ذكرها لمواصلة عملية التحسين مادمنا لم نتوصل إلى الحل الأمثل بعد لأن هناك قيمة موجبة في السطر الأخير من الجدول أي أن هناك إمكانية تحقيق أرباح إضافية عن طريق إدخال تلك المتغيرات التي لها قيمة موجبة في السطر الأخير إلى الحل . و ما دامت هناك قيمة موجبة واحدة فإن المتغير الداخل إلى الحل هو X_2 أما المتغير الخارج فسيكون أصغر حاصل قسمة قيم العمود 3 على قيم العمود 5 و هو المتغير S_1 حيث أن :

$$20 = 3 \div 60$$

$$26.67 = 9/2 \div 120$$

$$120 = 1/2 \div 60$$

و بذلك يكون الجدول الثالث كما يلي :

الجدول رقم 3

1	2	3	4	5	6	7	8	
			X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A
C	V	Q	30	20	0	0	0	B
20	X_2	20	0	1	1/3	0	- 1/2	C
0	S_2	30	0	0	- 3/2	1	3/2	D
30	X_1	50	1	0	- 1/6	0	1/2	E
Z = 1900			30	20	5/3	0	5	F
C - Z			0	0	- 5/3	0	- 5	G

نلاحظ أن جميع قيم السطر الأخير من الجدول الثالث هي سالبة أو معدومة ، و بذلك يمكن القول أننا توصلنا إلى الحل الأمثل، و يمكن قراءة الحل الأمثل كما يلي :

- – تظهر متغيرات الحل في العمود رقم 2 و مقاديرها في العمود رقم 3 أي أن:

$X_1 = 50$, $X_2 = 20$, $S_2 = 30$

أي أنه سيتم إنتاج 50 وحدة من المنتوج الأول و 20 وحدة من المنتوج الثاني و تبقى طاقة غير مستغلة من المورد الثاني (القسم الثاني) تقدر ب 30 ساعة .

- – الربح الإجمالي الذي يحققه هذا البرنامج الإنتاجي يقدر ب 1900 دج و يمكن قراءته من الصف F و هو عبارة عن حاصل ضرب قيم العمود رقم 1 في قيم العمود 3 و جمعها $(20 * 20) + (0 * 30) + (30 * 50) = 1900$.

- **– الأرقام الموجودة في السطر الأخير من الجدول (السطر G) تدل على ما يلي:**

الصفر الموجود في تقاطع السطر G مع العمود 4 هو نتيجة لإدخال المتغير X_1 في الحل النهائي. و نفس الكلام يقال حول الصفر الموجود في تقاطع السطر G مع العمود 5 و مع العمود 7 . أي أن جميع متغيرات الحل النهائي لابد أن تكون قيمها صفرا في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل . و تبدو أهمية قيمة هذه الأرقام عندما تكون هناك متغيرات أصلية أو متغيرات القرار لا يتم إختيارها .

أما أرقام تقاطع السطر G مع الأعمدة 6 و7 و 8 فهي تقيس تكلفة قيود الموارد المتاحة الثلاثة في الأقسام الثلاثة في حالة زيادة وحدات منها أو إنخفاضها بوحدات أيضا و تأثير ذلك على البرنامج الإنتاجي الأمثل و على إجمالي الأرباح المحققة ، و ذلك ما يطلق عليه بالربح الحدي أو التكلفة الحدية و سنتناول ذلك بالتفصيل في موضوع تحليل الحساسية لاحقا .

ملاحظة :

1- يمكن التأكد من أن الحل الأمثل المتوصل إليه لا يتعارض مع قيود المسألة عن طريق التعويض بنتائج الحل الأمثل في القيود كما يلي :

قيد القسم الأول: $6X_1 + 6X_2 \leq 420$

و بذلك فإن $6(50) + 6(20) = 420$

أي أن الطاقة المتاحة استغلت بالكامل و القيد إذا محقق

قيد القسم الثاني: $3X_1 + 6X_2 \leq 300$

و بذلك فإن $3(50) + 6 (20) = 270$

إذا هناك طاقة متبقية في القسم الثاني قدرها الفرق بين الطاقة المتاحة و الطاقة المستغلة و هي تساوي $300 - 270 = 30$ ساعة.

قيد القسم الثالث: $4X_1 + 2X_2 \leq 240$

و بذلك فإن $4(50) + 2 (20 = 240$

أي أن الطاقة المتاحة استغلت بالكامل و القيد محقق.

شرط عدم سلبية المتغيرات: $X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0$

و هو محقق أيضا لأن كميات X_1 و X_2 و S_2 في الحل النهائي موجبة، أما قيم كل من S_1 و S_3 فهي تساوي الصفر و بذلك فهي غير موجودة في الحل النهائي.

ملاحظات:

1. تكون جميع معاملات متغيرات القرار في الحل النهائي في نقاط تقاطع صفوفها مع أعمدتها مساوية لـ **1** و بقية المعاملات في العمود مساوية لصفر .
2. عند إيجاد المتغير الداخل، قد نجد أن هناك متغيرين داخلين أي لهما نفس المقدار في السطر الأخير من الجدول، عندئذ يتم اختيار احدهما عشوائيا ليكون متغيرا داخلا.
3. عند إيجاد المتغير الخارج، قد يكون اصغر حاصل قسمة متساوي لمتغيرين أو أكثر، عندئذ يتم اختيار احدهما عشوائيا ليكون متغيرا خارجا.
4. إن دخول أي متغير للحل أثناء عملية التحسين لا يعني بالضرورة انه سيبقى في الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل ، بل قد يصبح متغيرا خارجا في أية عملية تحسين لاحقة.
5. في حالة وجود معاملات سالبة أو معدومة في عمود المحور فانه يجب إهمالها و التركيز على المعاملات الموجبة فقط. أما إذا كانت كلها سالبة أو معدومة فذلك يعني عدم إمكانية تحديد المتغير الخارج و بالتالي لا يكون هناك حل للمسالة و السبب قد يعود إلى سوء صياغة المسالة.

6. لا يقتصر استغلال المعطيات الواردة في سطر التقييم من جدول الحل الأمثل على إبراز أمثلية الحل من عدمها بل يمتد إلى إيفادنا ببعض المعلومات المفيدة في التنبؤ بأثر التغيرات التي قد تحدث في المعطيات الرئيسية للمسألة على النتيجة النهائية.

خطوات حل مسائل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

1. **الخطوة1: وضع أو صياغة النموذج الرياضي للمسألة**

أ) تحديد المتغيرات أو المجاهيل

ب) تحديد القيود

ج) تحديد دالة الهدف

2. **الخطوة2 : حل النموذج الرياضي بطريقة السمبلكس**

أ) تحويل النموذج الرياضي إلى نموذج معياري

ب) إيجاد حل أولي مقبول

ج) نقل معطيات الحل الأولي المقبول إلى جدول السمبلكس الأول (جدول الحل الأولي)

د) اختبار أمثلية الحل حيث نتوصل إلى الحل الأمثل عندما تكون جميع قيم السطر الأخير من الجدول سالبة أو معدومة و نتجه إلى المرحلة " م". و في حال العكس نلجأ إلى الخطوة الموالية "ه".

ه) تحسين الحل عن طريق :

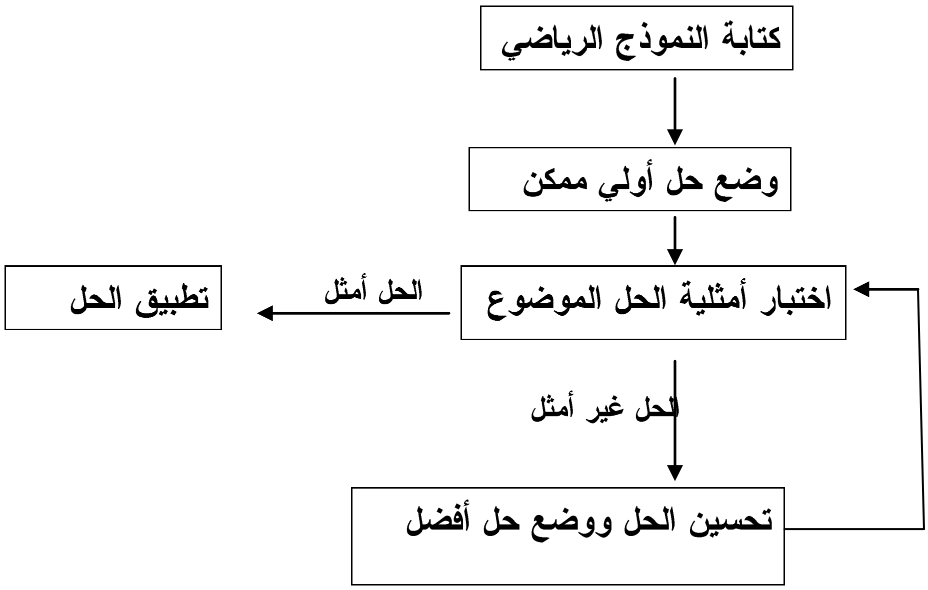
- إيجاد المتغير الداخل للحل
- إيجاد المتغير الخارج من الحل
- رسم جدول جديد يوضح عملية التحسين الناتجة عن إدخال المتغير الجديد
- حساب بقية القيم في الجدول وفقا للعلاقات السابقة الذكر

و) نعود إلى مرحلة الاختبار المرحلة " د "

م) بعد التوصل إلى الحل الأمثل يتم :

- تحديد البرنامج الإنتاجي الأمثل
- تحديد مقدار دالة الهدف
- تحديد الموارد المستغلة و الغير مستغلة بالكامل لاتخاذ قرارات بشأنها
- التحقق من صحة الحل بالتعويض بقيم الحل الأمثل في دالة الهدف و القيود
- تحليل حساسية الحل الأمثل لأي تغيرات في الموارد و/أو في المعاملات التقنية للمنتجات و/او في معاملات دالة الهدف.

خلاصة خطوات الحل بطريقة السمبلكس



2- حالة النموذج الرياضي المختلط

يختلف حل النموذج الرياضي المختلط بطريقة السمبلكس عن حل النموذج الرياضي العام الذي سبق التطرق إليه فيما يتعلق بمعالجة أنواع القيود الأخرى التي قد يتضمنها النموذج الرياضي المختلط و لذلك سنعتمد على المثال التالي كحالة تطبيقية .

مثال :

تقوم مؤسسة الحديد و الصلب بإنتاج و بيع نوعين من الفولاذ P1وP2 حيث تحقق ربحا قدره 60 دينار و 40 دينار عن الطن الواحد على التوالي. و تحتاج عملية إنتاج طن من النوع الأول من الصلب إلى2 طن من المواد الأولية في حين يحتاج إنتاج الطن الواحد من النوع الثاني من الصلب إلى 3 طن من المواد الأولية. و تتوفر المؤسسة على موارد تقدر ب 120 طن من المواد الأولية فقط، كما أن إدارة المبيعات تشترط إنتاج 10 أطنان بالضبط من النوع الأول P1 و 20 طن على الأقل من النوع الثاني P2 و ذلك من أجل تلبية طلبات الزبائن من جهة و المحافظة على الأسعار من جهة أخرى.

المطلوب :

تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كل نوع من الصلب من أجل تعظيم أرباح المؤسسة ؟

الحل

بتطبيق خطوات الحل السابقة، يكون الحل كما يلي:

الخطوة رقم 1: بناء النموذج الرياضي:

أ- **تحديد المتغيرات:**

- لنفرض أن X_1 يمثل عدد الأطنان من النوع الأول من الفولاذ P1 الواجب إنتاجها وبيعها.
- لنفرض أن X_2 يمثل عدد الأطنان من النوع الثاني من الفولاذ P2 الواجب إنتاجها وبيعها.

ب- **تحديد دالة الهدف رياضيا**

الهدف هو تعظيم الأرباح الكلية من إنتاج و بيع نوعي الفولاذ. إذا دالة الهدف في حالة تعظيم

$$Max\ (z) = 60\ X_1 + 40\ X_2$$

ج – **تحديد القيود رياضيا**

قيد كمية المواد الأولية المتاحة :	$2X_1 + 3\ X_2 \leq 120$
قيد الطلبية على النوع الأول من الصلب	$X_1 = 10$
قيد الحد الأدنى المطلوب من النوع الثاني من الصلب	$X_2 \geq 20$
شرط عدم السلبية	$X_1\ ,\ \ X_2 \geq 0$

نلاحظ أن النموذج الرياضي أعلاه من النوع المختلط و دالة الهدف من نوع التعظيم Max.

الخطوة رقم 2 : تحويل النموذج الرياضي المختلط إلى نموذج معياري

القيد الأول من نوع أقل أو تساوي ، نضيف متغير الفروق و يصبح $\mathbf{2X_1 + 3X_2 + S_1 = 120}$

القيد الثاني على شكل مساواة و نتركه على حاله **في الوقت الراهن** أي أن $\mathbf{X_1 = 10}$

القيد الثالث هو من نوع أكبر أو تساوي وتحويله إلى معادلة يتطلب تخفيض الطرف الأكبر(أي الطرف الأيسر) من القيد بمقدار نرمز له ب D_1. و يطلق على المتغير **D_1 بمتغير الزيادة Variable de surplus** أي الزيادة التي يمكن أن يزيد بها الطرف الأيسر من القيد على الطرف الأيمن، كما يمكن تعريفه بأنه يمثل مقدار الزيادة على الحد الأدنى المطلوب في المسألة و بذلك يكون القيد الثالث كما يلي:

$$\mathbf{X_2 - D_1 = 20}$$

شرط عدم سلبية المتغيرات: $\mathbf{X_1\ ,\ \ X_2\ ,\ S_1,\ S_2\ ,\ D_1 \geq 0}$

دالة الهدف :

بما أنه لا ينتج أي أرباح عن متغيرات الفروق و الزيادة فإنه يمكن كتابة دالة الهدف كما يلي:

$$\mathbf{Max\ (Z) = 60\ X_1 + 40\ X_2 + 0S_1 + 0D_1}$$

الخطوة رقم 3 إيجاد حل أولي مقبول

يتم ذلك عن طريق وضع كلا من X_1 و X_2 مساوية للصفر أي حالة اللاإنتاج و بذلك يكون الحل الأولي كما يلي:

القيد الأول: $S_1 = 120$

القيد الثاني: $10 = 0$ و هذا مستحيل و غير مقبول و بالتالي هذا القيد لا يحقق حلا أوليا .

القيد الثالث: $- D_1 = 20$ أي أن $\Longleftarrow D_1 = -20$ وهي كمية سالبة و تخرق شرط عدم سلبية المتغيرات و بالتالي هذا القيد لا يحقق أيضا حلا أوليا.

نلاحظ من خلال القيدين الثاني و الثالث أنه لا يوجد حل أولي مقبول علما أنه في حالة عدم تحقق قيد واحد فقط في النموذج الرياضي فذلك يعني عدم وجود حل أولي مقبول ، و لذلك لا بد من إيجاد حل أولي إصطناعي مقبول عن طريق إضافة **متغيرات إصطناعية Variables Artificielles** إلى القيود الغير محققة أي القيدين الثاني و الثالث و نرمز لها بـ **A** ، و بذلك يكون النموذج الرياضي الجديد كما يلي :

القيد الأول: $2X_1 + 3X_2 + S_1 = 120$

القيد الثاني: $X_1 = 10$ يصبح بعد إضافة المتغير الإصطناعي كما يلي $X_1 + A_1 = 10$

القيد الثالث : $X_2 - D_1 = 20$ يصبح بعد إضافة المتغير الإصطناعي كما يلي

$X_2 - D_1 + A_2 = 20$

شرط عدم سلبية المتغيرات: $X_1 , X_2 , S_1, S_2 , D_1 , A_1 , A_2 \geq 0$

دالة الهدف :

بما أنه تمت إضافة متغيرات إصطناعية للنموذج الرياضي لكي تساعدنا في الحصول على حل أولي فقط ، فإنه يجب التخلص منها حتى لا تظهر في الحل النهائي لأن ظهورها في الحل النهائي يجعل المسألة بدون حل ، و لتحقيق ذلك يتم تحميل المتغيرات الإصطناعية A في دالة الهدف بمعاملات (أرقام) كبيرة جدا تعمل عكس دالة الهدف تماما و هي عبارة عن ضريبة أو تكلفة كبيرة و نرمز لها ب $M-$ في حالات التعظيم و $M+$ في حالات التخفيض . و الهدف من ذلك أنه ما دام المتغير الإصطناعي يوجد ضمن متغيرات الحل فإن دالة الهدف التي نريد تعظيمها في مثالنا هذا ستتعرض لخسارة كبيرة بسبب وجود متغير أو عدة متغيرات إصطناعية في الحل . و ما دامت دالة الهدف في هذه المسألة تهدف إلى تحقيق أكبر ربح ممكن فإن معاملات المتغيرات الإصطناعية يجب أن تكون سالبة أي أن وجودها يسبب خسارة كبيرة ، عندئذ تكون دالة الهدف كما يلي :

$$\mathbf{Max\ (Z) = 60\ X_1 + 40\ X_2 + 0S_1 + 0D_1 - MA_1 - MA_2}$$

و لإيجاد حل أولي مقبول، نضع كلا من X_1 ، X_2 ، D_1 في القيود السابقة مساوية للصفر، عندئذ يكون الحل الأولي كما يلي :

القيد الأول : $S_1 = 120$ و هذا مقبول

القيد الثاني : $A_1 = 10$ و هذا مقبول و بالتالي هذا القيد أصبح يحقق حلا أوليا .

القيد الثالث : $A_2 = 20$ و هذا مقبول و بالتالي هذا القيد أيضا أصبح يحقق حلا أوليا .

دالة الهدف : أصبحت تساوي $Max(z) = -MA_1 - MA_2$ و هي خسارة كبيرة بسبب وجود المتغيرات الإصطناعية في الحل الأولي .

نلاحظ أن جميع القيود تعطي حلولا مقبولة و معقولة و بالتالي هناك حلا أوليا إصطناعيا مقبولا لهذه المسألة يمكن نقله لجدول السمبلكس .

الخطوة الرابعة : نقل معطيات الحل الأولي لجدول السمبلكس

جدول الحل الأولي

المتغير الخارج **المتغير الداخل**

			X_1	X_2	S_1	D_1	A_1	A_2
C	**V**	**Q**	**60**	**40**	**0**	**0**	**- M**	**- M**
0	S_1	**120**	**2**	**3**	**1**	**0**	**0**	**0**
- M	A_1	**10**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
-M	A_2	**20**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**1**
Z = - 30M			**-M**	**-M**	**0**	**M**	**-M**	**-M**
C - Z =			**60+M**	**40+M**	**0**	**-M**	**0**	**0**

الخطوة 5: اختبار أمثلية الحل المتوصل إليه

نتوصل إلى الحل الأمثل في حالة التعظيم Max عندما تكون جميع قيم السطر الأخير سالبة أو معدومة. و بما أن قيم السطر الأخير في الجدول السابق ليست كلها سالبة أو معدومة فإننا لم نتوصل إلى الحل الأمثل بعد و لا بد من عملية تحسين الحل .

الخطوة السادسة: تحسين الحل

تتضمن هذه العملية نفس الخطوات السابق الإشارة إليها في حالة النموذج الرياضي العام إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل أي :

– **تحديد المتغير الداخل:** نحن نعلم أننا عرفنا M بأنه رقم كبير أكبر من جميع الأرقام في المسألة (لنفرض 100 مثلا) و بذلك يكون المتغير الداخل هنا هو المتغير X_1.

– **تحديد المتغير الخارج :** ويكون بنفس الطريقة السابقة أي أخذ أصغر حاصل قسمة و هو المتغير A_1

– تحديد قيم معادلة المتغير الداخل و بقية القيم في الجدول الجديد وفقا للعلاقات السابقة و نواصل العمل إلى غاية الحصول على جدول الحل الأمثل وهو الجدول الرابع في هذه المسألة .

المتغير الخارج
صف المحور

المتغير الداخل
عمود المحور

الجدول الثاني:

			X_1	X_2	S_1	D_1	A_1	A_2
B	**V**	**Q**	**60**	**40**	**0**	**0**	**-M**	**-M**
0	S_1	**100**	**0**	**3**	**1**	**0**	**-2**	**0**
60	X_1	**10**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
-M	A_2	**20**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**1**
Z= 600-20M			**60**	**-M**	**0**	**M**	**60**	**-M**
C-Z=			**0**	**40+M**	**0**	**-M**	**-M+60**	**0**

نلاحظ أن قيم السطر الأخير ليست كلها سالبة أو معدومة، أي أن هناك قيم موجبة تدل على إمكانية زيادة قيمة دالة الهدف و بالتالي لم نتوصل إلى الحل الأمثل بعد و لا بد من عملية التحسين.

عملية التحسين:

إيجاد المتغير الداخل: القيمة الموجبة الوحيدة هي $40+M$ تحت عمود X_2 و بالتالي سيكون متغيرا داخلا للحل.في حالة وجود عدة قيم موجبة في السطر الأخير نختار الأكبر.

إيجاد المتغير الخارج: أصغر حاصل قسمة الأرقام الموجودة في عمود الكمية (Q)(العمود الثالث)على معاملات عمود المتغير الداخل X_2 تكون كما يلي:

$100 ٪ 3 = 33.33$ ، $10 ٪ 0 = \infty$ ، $20 ٪ 1 = 20$

أصغر حاصل قسمة = 20 و من ثم فإن المتغير الخارج هو $\mathbf{A_2}$

ننقل هذه المعطيات الجديدة ال جدول جديد كما يلي

الجدول الثالث:

			X_1	X_2	S_1	D_1	A_1	A_2
B	**V**	**Q**	**60**	**40**	**0**	**0**	**-M**	**-M**
0	S_1	**40**	**0**	**0**	**1**	**3**	**-2**	**-3**
60	X_1	**10**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
40	X_2	**20**	**0**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**1**
Z= 1400			**60**	**40**	**0**	**-40**	**60**	**40**
C-Z=			**0**	**0**	**0**	**+40**	**-M-60**	**-M+40**

نلاحظ أن هناك قيمة موجبة و بالتالي لم نتوصل إلى الحل الأمثل بعد و لا بد من عملية تحسين أخرى

عملية التحسين:

- المتغير الداخل هو $\mathbf{D_1}$

- المتغير الخارج : نلاحظ أن هناك قيما سالبة و أخرى معدومة في عمود المحور و لذلك يجب إهمالها و التركيز على المعاملات الموجبة فقط ، و بذلك يكون المتغير S_1 هو المتغير الخارج.

الجدول الرابع:

			X_1	X_2	S_1	D_1	A_1	A_2
B	**V**	**Q**	**60**	**40**	**0**	**0**	**-M**	**-M**
0	D_1	**13.33**	**0**	**0**	**1/3**	**1**	**-2/3**	**-1**
60	X_1	**10**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
40	X_2	**33.33**	**0**	**1**	**+1/3**	**0**	**-2/3**	**0**
Z= 1933.2			**60**	**40**	**13.33**	**0**	**33.33**	**0**
C-Z=			**0**	**0**	**-13.33**	**0**	**-M-33.33**	**-M**

الخطوة السابعة : الوصول إلى الحل الأمثل

نلاحظ أن جميع قيم السطر الأخير من الجدول سالبة أو معدومة و بالتالي توصلنا إلى الحل الأمثل و هو كما يلي:

$X_1= 10$, $X_2= 33.33$, $S_1=0$, $D_1=13.33$, $A_1= 0$, $A_2= 0$, $Z = 1933.2$

خلاصة قواعد مسائل التعظيم:

تستعمل طريقة السمبلكس لمعالجة مسائل البرمجة الخطية التي تهدف إلى تعظيم دالة الهدف إلى أقصى مستوى ممكن. و أهم قواعد هذا النوع من المسائل هي:

1. إن قاعدة اختيار المتغير الداخل يجب أن تعكس الهدف المنشود المتمثل في البحث عن أكبر ربح ممكن لدالة الهدف، و بالتالي فإننا نبحث عن أكبر رقم ممكن في السطر الأخير من جدول السمبلكس ليمثل عمود المتغير الداخل للحل.
2. في حالة إدخال متغيرات إصطناعية للنموذج الرياضي، فإن معاملاتها في دالة الهدف تمثل خسارة كبيرة جدا أي $-M$ حيث M رقم كبير جدا.
3. نتوصل إلى الحل الأمثل عندما تكون جميع قيم السطر الأخير من جدول السمبلكس (سطر التقييم) سالبة أو معدومة.