نظريـــــــة اتخاذ القـــــــرار

تمهيد:

تعتبر عملية اتخاذ القرار إحدى الوظائف الأساسية للإدارة أي جوهر العملية الإدارية حيث تبدأ منذ اللحظة الأولى التي تشعر فيها الإدارة بوجود مشكلة و تنتهي بمرحلة التنفيذ الفعلي للقرار، كي يتم تنفيذ القرار لابد من المرور بعدد من المراحل و التي تتمثل في :

* تحديد المشكلة

* تحديد البدائل المختلفة لحل المشكلة تمهيدا لاختيار إحداها

* تحيد بعض الأهداف و التي يترتب عليها المفاضلة بين البدائل المختلفة مثل تحقيق أكبر عائد أو أقل تكلفة

* دراسة البدائل المطروحة لاختيار أفضلها في ظل الإمكانات المتاحة

* تحديد المناخ الذي يتخذ في ظله القرار و ما يتضمنه من اعتبارات مثل شخصية متخذ القرار بما في ذلك من تأثير على اتجاه القرار.

تعرف عملية اتخاذ القرار بأنها: اختيار أفضل البدائل بعد دراسة النتائج المتوقعة لكل بديل و أثره في تحقيق الأهداف المطلوبة إذا لابد من وجود عدة بدائل لاتخاذ القرار و عادة ما يطلق على البدائل (**الإستراتجيات**) $A=(a_1 ,a_2,a_3,....,a_n)$

و المناخ نسميه حالات الطبيعية $E=(e_1,e_2,e_3,...,e_n)$ تسمى **أحداث مستقبلية محتملة الوقوع** مثل تواجه شركة ما مشكلة توسيع خط الإنتاج و زيادة إنتاجيتها من أجل تغطية احتياجات السوق المختلفة.

1/ تحديد المشكلة: توسيع خط الإنتاج و زيادة إنتاجاتها هنا تبدأ الإدارة العليا بتحديد الإستراتجيات من أجل مواجهة هذه المشكلة ، و قد تكون أمامها البدائل التالية:

a_1: توسيع المصنع الحالي

a_2: بناء مصنع بطاقات إنتاجية كبيرة

a_3: التعاقد مع منظمة أخرى لتلبية الطلبيات الداخلية

بعد ذلك تبدأ الإدارة العليا بترتيب قائمة لتحديد الاتجاهات المستقبلية و التي يمكن وقوعها و التي تكون عادة خارج عن نطاق سيطرة متخذي القرار.

أما بالنسبة للإدارة فقد تكون أكثر حالات الطبيعية أو الأحداث المستقبلية المؤثرة هي الحالات الخاصة بحجم الطلب على المنتج قد يحصل أن يكون حجم الطلب عاليا (مرتفعا)، متوسط و منخفض أو لا يوجد في السوق (قد يخاطر) التي تؤثر في عملية اتخاذ القرار، و في الأخير تعمل الإدارة على إعداد قائمة العوائد أو الأرباح و التي يمكن تحقيقها في ظل الإستراتيجيات و الحالات المختلفة و قد جرت العادة على تصوير خطوات عملية اتخاذ القرار في شكل جدول (**مصفوفة العوائد**) حيث تمثل $e_1 ,e_2 ,e_3,.....e_n$ جميع الأحداث المستقبلية التي يمكن أن تحدث (حالات طبيعية) و $a_1,a_2,a_3,....,a_n$ **الحلول الممكنة** (البدائل).

R_{ij}: العائد الناتج عن اختيار البديل i عند حالة الطبيعية j

E_j / A_i	e_1	e_2	e_3	....	e_j	....	e_m
a_1	R_{11}	R_{12}	R_{13}	....	R_{1j}	....	R_{1m}
a_2	R_{21}	R_{22}	R_{23}	....	R_{2j}	....	R_{2m}
a_3	R_{31}	R_{32}	R_{33}	....	R_{3j}	....	R_{3m}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_i	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}	....	R_{ij}	....	R_{im}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_n	R_{n1}	R_{n2}	R_{n3}	....	R_{nj}	....	R_{nm}

يعرف الجدول السابق بمصفوفة القرارات و هي عبارة عن منظومة تحتوي على عدد الصفوف و الأعمدة حيث تمثل الصفوف البدائل أما الأعمدة فتمثل حالات الطبيعة المختلفة و كل خلية من الخلايا المصفوفة تمثل العائد المتحقق أو التكلفة المتحققة عند تبني إستراتيجية معينة و عندما تسود حالة معينة من حالات الطبيعة.

بالنسبة للمثال السابق:

1/ تحديد المشكلة، توسيع خط الإنتاج و زيادة الإنتاجية.

2/ البدائل $A_i = (a_1,a_2,a_3)$

a_1: توسيع المصنع الحالي

a_2: بناء مصنع بطاقات إنتاجية كبيرة

a_3: التعاقد مع منظمة أخرى لتلبية الطلبيات الداخلية

3/ حالات الطبيعة $E_j = (e_1,e_2,e_3,e_4)$

e_1: الطلب عالي

e_2: الطلب متوسط

e_3: الطلب منخفض

e_4: لا يوجد طلب

مصفوفة القرار (مصفوفة العوائد)

A_i / E_j	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	30	15	-15	-23
a_2	50	20	-30	-60
a_3	20	10	-1	-5

بعد ذلك تعمل الإدارة على اختيار و تطبيق نموذج نظرية اتخاذ القرار، و تعتمد أنواع القرارت الإدارية على مقدار المعلومات أو المعرفة حول الحالة المعنية في اتخاذ القرار لذا يمكن تصنيف القرارات إلى:

1/ في حالة التأكد ، 2/ في حالة عدم التأكد ، 3/ في حالة المخاطرة ، 4/ نظرية الاختلاف (المنافسة)

1/ القرارات في حالة التأكد:

تعني هذه المعرفة التامة و الدقيقة للحدث المتوقع و نتائج كل بديل مع افتراض هنا أن متخذ القرار على دراية كاملة للمستقبل و عليه يستطيع متخذ القرار اختيار أفضل القرارات التي من شأنها أن تحقق له أفضل المكاسب علما بأن هذه الحالات تبقى رهينة الإطار النظري إذ لا تتفق مع الواقع العلمي.

مثال: يمثل الجدول التالي العوائد المقابلة لثلاث استراتيجيات و المطلوب اختيار البديل الذي يحقق أعلى العوائد

البدائل	العوائد(دج)
a_1	100
a_2	255
a_3	265

من خلال الملاحظة نجد أن أعلى عائد تحققه الإستراتيجية الثالثة .

أفضل بديل عائده 265 هو $a_i^* = a_3$

مثال: يمثل الجدول التالي التكاليف بالدينار لثلاث استراتيجيات و المطلوب هو اختيار الإستراتيجية المثلى.

الاستراتيجيات	التكاليف(دج)
a_1	350
a_2	150
a_3	250

أفضل بديل هو $a_i^* = a_2$ (150 DA)

لأنه يحقق أقل تكلفة.

2/ القرارات في حالة عدم التأكد:

يكون متخذ القرار هنا على معرفة بحدوث حالات الطبيعة لكن تنقصه المعلومات بشأن احتمالات وقوعها.

و في ظل هذه الظروف لابد من الاستعانة بمعيار معين لاختيار إستراتجية و القرار المناسب و من بين المعاير المستخدمة لمساعدة متخذ القرار على اتخاذ احد الاستراتيجيات

معيار أقصى الأقصى (MAX MAX): هو معيار التفاؤل

معيار أقصى الأدنى (MIN MAX): هو معيار التشاؤم

معيار لابلاس (La place): هو الوسط الحسابي + التوقع

معيار هيرويكز (Harwicz)

A_i \ E_J	e_1	e_2	e_3	e_4
توسيع المصنع:a_1	30	15	-15	-25
بناء مصنع جديد:a_2	50	20	-30	-60
التعاقد مع منظمة:a_3	20	10	-1	-5

1/ معيار أقصى الأقصى (التفاؤل): يوفر هذا المعيار لمتخذ القرار اتخاذ البديل الأفضل و يطلق عليها بالإستراتيجية التفاؤلية، إذ يتم اختيار أفضل أقصى ممكن من الأرباح لكل بديل ثم يختار المكسب الأكبر ضمن هذه المصفوفة.

Max = { 30 ,50 ,20 }

حسب هذا المعيار يختار البديل الثاني $a_i^* = a_2$ (بناء مصنع جديد)

2/ معيار التشاؤم (والاد): يطلق عليه الإستراتيجية التشاؤمية بهذه الظروف يحاول متخذ القرار تفادي الخسائر المحتملة من خلال اختيار أسوء النتائج و من ثم يتم اختيار أفضلها بمعنى اختيار أقل الأرباح لكل بديل ثم اختيار الربح الأكبر من بين الأقل في المجموعة و في حالة التكاليف اختيار أكبر التكاليف و من ثم اختيار الأقل في المجموعة.

Max Min (a_i) = Max { -25,-60,-5} = -5

أفضل بديل هو $a_i^* = a_3$ التعاقد

3/ معيار لابلاس: يطلق عليه بالمعيار الرشيد العقلاني حيث يقدم هذا المعيار احتمالات متساوية لحدوث حالات الطبيعة و عليه يتم حساب الوسط الحسابي لكل بديل ثم اختيار بديل الذي يمثل أكبر المكاسب في حالة الأرباح و اقل قيمة في حالة التكاليف.

حساب المتوسط الحسابي:

$$\bar{X}a_1 = \frac{30+15-15-25}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

$$\bar{X}a_2 = \frac{50+25-30-60}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

$$\bar{X}a_3 = \frac{20+10-1-5}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

حسب هذا المعيار أفضل بديل هو $a_i^* = \ _3$ (التعاقد مع منظمة)

4/ معيار سافاج: يطلق عليه معيار الندم و يفترض فيه متخذ القرار قد يندم على اتخاذه القرار و عليه فإنه يحاول تقليل قيمة الندم أو الفرصة الضائعة و يمكن تحديده بمقدار الفرق بين ما يفترض اختياره و ما تم اختياره فعلا أما عن خطوات الحل فهي كالآتي:

1/ في البداية يتم تحديد أعلى قيمة من كل عمود في كل حالة من حالات الطبيعة و من ثم إيجاد الفرصة الضائعة من خلال حساب الفرق بين أعلى قيمة و كل قيم العمود.

2/ في حالة مصفوفة التكاليف يتم حساب الفرق بين أقل قيمة في ذلك العمود و كل قيمة من قيم نفس العمود.

3/ تحديد أقصى قيمة للندم لكل بديل.

4/ اختبار البديل الذي يؤشر إلى أقل قيمة في الجموعة.

مصفوفة الندم

A_i \ E_J	e_1	e_2	e_3	e_4	Max
a_1	20	5	14	20	20
a_2	0	0	29	55	55
a_3	30	10	0	0	30

إذن أقل قيمة للندم يمكن أن يندم عليها المدير هي $a_i^* = a_1$.

البديل الأول: Max = { 20,30,55 }=20

مثال: لدى شخص X ورقتين نقديتين قيمتهما 20 ، 50 على التوالي و طلب من الشخص Y الكشف عن إحدى الورقتين، إذا كان اختياره صحيح فإنه يربح الورقة التي كشف عنها.

المطلوب: حدد البدائل و حالات الطبيعة ثم أنشئ مصفوفة القرار ثم تحديد أفضل بديل حسب المعايير.

الحل: البدائل $A_i = \{ a_1, a_2 \}$

a_1: القول بان الورقة من فئة 20

a_2: القول بأن الورقة من فئة 50

حالات الطبيعة $E_j = \{ e_1, e_2 \}$

e_1: الورقة فعلا من فئة 20

e_2: الورقة فعلا من فئة 50

A_i \ E_J	e_1	e_2
a_1	20	0
a_2	0	50

5/ معيار هورويز:

يطلق عليه معيار الواقعية أي معيار المعدل الموزون، إذ يتم الجمع بين خصائص إستراتيجية الأقصى الأقصى (التفاؤل) وبين إستراتيجة الأقصى الأدنى Max Min (التشاؤم)

حيث تساعد هذه الإستراتيجية على فتح المجال لمتخذ القرار لأخذ بنظر الإهتمام الأقصى و أدنى كل بديل و إعطائه أوزانا بموجب درجة ندم متخذ القرار و من ثم اختيار البديل الذي يحقق أكبر مكسب ممكن حيث يأخذ بنظر الاهتمام أسوء النتائج و أفضلها لكل بديل أما عن خطوات الحل فهي كالآتي:

1/ اختيار درجة ملائمة من التفاؤل و لتكن α و عليه:

α: درجة التفاؤل ، و عليه **1-α: درجة التشاؤم** و عندما تكون **α=1 معناه المعيار متفائل جدا** و عندما تكون **α=0** معناه المعيار **متشائم جدا**

و بشكل عام يكون الاختيار معقولا عندما $\alpha = \frac{1}{2}$ (أوسط)

2/ تحديد إستراتيجية الأقصى فضلا عن إستراتيجية الأدنى لكل حالة و استخراج $P=\alpha(Max)+(1-\alpha)(Min)$

أي أنه في حالة الأرباح يتم ضبط درجة التفاؤل في أعلى قيمة من كل بديل و ضرب درجة التشاؤم في أقل قيمة من كل بديل.

في حالة التكاليف يتم ضرب أعلى القيم في معيار التشاؤم و أقل قيمة في معيار التفاؤل .

الأرباح: $P= \alpha(Max)+(1-\alpha)(Min)$

التكاليف: $P= (1-\alpha)(Max)+\alpha(Min)$

3/ إختيار البديل الذي يؤشر إلى أعلى قيمة لـ P في حالات الأرباح و البديل الذي يؤشر إلى أقل قيمة لـ P في حالات التكاليف.

مثال: علما أن $\alpha=0.8$، و أن الجدول التالي يمثل العوائد الآلاف الدنانير

المطلوب: تطبيق معيار هيرويكز باختيار أفضل قرار

E_J / A_i	e_1	e_2	e_3	e_4	Max	Min
التوسيع	30	15	-15	-23	30	-23
بناء مصنع جديد	50	20	-30	-60	50	-60
التعاقد	20	10	-1	-5	20	-5

$P=\alpha(Max)+(1-\alpha)(Min)$

P_{a1}= 0.8(30)+0.2(-23)=19.4

P_{a2}= 0.8(50)+0.2(-60)=28

P_{a3}= 0.8(20)+0.2(-5)= 15

أفضل بديل هو a_2 بناء مصنع جديد

بعد تطبيق هذا المعيار يتم اختيار الإستراتيجية الثانية الخاصة ببناء مصنع جديد لأنها تحقق أعلى الإيرادات و البالغة 28000 دج

3/ القرارات في حالة المخاطرة:

في هذه الظروف يكون متخذ القرار على علم باحتمال وقوع أو حدوث كل حالة من حالات الطبيعة، إذ تستخرج هذه الاحتمالات من سجلات الماضي أو من خلال حكم متخذ القرار فيها توجد عدة معايير مساعدة و تسهل عملية اتخاذ القرار في حالة المخاطرة

1/ معيار القيمة المتوقعة (EMG):

يتطلب هذا المعيار حساب القيمة المتوقعة لكل بديل و الذي هو مجموع أوزان هذه البدائل إذ تمثل الأوزان بحاصل ضرب الأرباح أو التكاليف بالاحتمالات المقابلة لها لحالات الطبيعة المختلفة.

طبقا لهذا المعيار يتم تحديد القيمة المتوقعة (EMG) لكل بديل تحت جمع الأحداث المحتملة باستخدام المعادلة التالية:

$$\mathbf{EMG} = \sum_{j=1}^{m} \oint (a_i, e_j) P(e_j)$$

مثال 1:

تمثل مصفوفة القرار الآتية مجموعة من البدائل a_1, a_2, a_3 تحت حالات الطبيعة e_1, e_2, e_3

المطلوب تحديد البديل الأفضل لكل قرار من حيث التكلفة الأقل علما أن حالات الطبيعة على التوالي: 20,50,30

A_i \ E_j	e_1	e_2	e_3
a_1	5	7	8
a_2	9	6	8
a_3	4	9	6
$P(e_j)$	20%	50%	30%

$EMG_1 = 5(0.2)+7(0.5)+8(0.3) = 6.9$

$EMG_2 = 9(0.2)+6(0.5)+8(0.3) = 7.2$

$EMG_3 = 4(0.2)+9(0.5)+6(0.3) = 7.1$

أفضل بديل هو البديل الأول $EMG_1 = 6.9$ أقل تكلفة

مثال 2: يرغب احد التجار في أن يستثمر مبلغ نصف مليون دينار لعام واحد و وجد أمامه كل من الخيارات التالية:

- وضع كامل المبلغ لشراء أسهم
- وضع 50 % من المبلغ في الأسهم
- وضع 50 % من المبلغ في المشاريع التجارية

كما وجد أن الاستثمار في كل من الخيارات السابقة يعتمد على حالات الطبيعة التي قد تحدث خلال العام و التي يمكن وصفها كما يلي:

1/ تراجع في الحالة الاقتصادية

2/ بقاء الحالة الاقتصادية كما هي لا يوجد تعيير

3/ تحسين ملموس في الحالة الاقتصادية

و من واقع البيانات تم وضع القيم الاحتمالية للبدائل 10 %، 60%، 30%

المطلوب: تحديد البديل الأفضل لاتخاذ القرار السليم

الحل:

A_i \ E_j	e_1	e_2	e_3
a_1	55	55	55
a_2	25	45	50
a_3	10	40	65
$P(e_j)$	0.1	0.6	0.3

$EMG_1=55(0.1)+55(0.6)+55(0.3)=$

$EMG_2=25(0.1)+45(0.6)+50(0.3)=$

$EMG_3=10(0.1)+40(0.6)+65(0.3)=$

تعرف القيم النقدية لدالة المخاطرة و عليه فإن أفضل قرار الذي يعطي أقل دالة مخاطرة

بشكل عام : إن هذا الأسلوب يعتمد إما على التوزيعات الأولية لحالات الطبيعة و التي غالبا ما تكون غير دقيقة أو إنما نقوم بجمع بعض المعلومات و المشاهدات عن حالات الطبيعة و بعدها نقوم باشتقاق توزيع احتمالي لاحق و الذي يعتمد على نظرية بايز و يعرف هذا بالأسلوب البايزي.

/2 معيار الفرصة الضائعة المتوقعة:

تعبر الفرصة الضائعة عن المبلغ المفقود الناتج عن عدم اختيار البديل الأفضل و هي تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\mathbf{EOL}(a_i) = \sum_{j=1} EOL(a_i)\, P(e_j)$$

A_i \ E_j	e_1	e_2	e_3
a_1	0	0	10
a_2	30	10	5
a_3	45	15	0
$P(e_j)$	0.1	0.6	0.3

بالنسبة للمثال السابق ما هو أفضل قرار بالنسبة لمعيار الفرصة الضائعة.

$EOL(a_1)=0.1(0)+0.6(0)+0.3(10)=3$

$EOL(a_2)=0.1(30)+0.6(10)+0.3(0)=10.5$

$EOL(a_3)=0.1(45)+0.6(15)+0.3(0)=13.5$

معيار القيمة النقدية المتوقعة للمعلومة الكاملة (المعلومة الصحيحة) (VEIP):

يحاول متخذ القرار الحصول على البيانات و المعلومات اللازمة لزيادة الثقة في اختيار البديل و الحصول على بيانات من مصادرها العلمية يترتب عليها تكاليف إضافية لذا ينبغي على متخذ القرار تقييم أهمية و قيمة المعلومات الإضافية التي يحصل عليها بالأثر الذي سوف تلعبه في تحسين قيمة البديل الأفضل.

إذ قيمة المعلومات الكاملة تشمل الفرق بين القيمة المتوقعة للقرار بتوفر المعلومات كاملة و القيمة المتوقعة قبل توفر المعلومات الكاملة المتمثلة في : $\text{Max EMG}(a_i)$

$$\mathbf{VEIP = EMG_C - Max\ EMG}(a_i)$$

حيث EMG_C: القيمة المتوقعة إذا كانت المصفوفة مصفوفة أرباح أو عوائد :

القيمة المتوقعة = أعلى عائد عند حالة الطبيعة (1) في احتمالها + أعلى عائد عند حالة الطبيعة (2) في احتمالها + أعلى عائد عند حالة الطبيعة (3) في احتمالها + ...

EMG_C= أعلى عائد عند e_1×$P(e_1)$ + أعلى عائد عند e_2×$P(e_2)$ +..................+ أعلى عائد عند e_m×$P(e_m)$

مثال : نفس المثال السابق

A_i \ E_j	e_1	e_2	e_3
a_1	55	55	55
a_2	25	45	50
a_3	10	40	65
$P(e_j)$	0.1	0.6	0.3

عند e_1 أعلى عائد هو عند البديل a_1 = 55

عند e_2 أعلى عائد هو عند البديل a_1 = 55

عند e_3 أعلى عائد هو عند البديل a_3 = 65

$EMG_c = 55(0.1)+55(0.6)+65(0.3)=58$

في حالة التكاليف (المصفوفة مصفوفة تكاليف)

$$\textbf{VEIP = Min EMG}(a_i)\textbf{ - EMG}_C$$

$$\text{VEIP} = \text{EMG}_C - \text{Max EMG}(a_i)$$

$$= 58 - 55 = 3$$

$$\textbf{VEIP = Min EOL}(a_i)$$

نظرية بايز:

تعتبر نظرية بايز أحد أهم الأساليب المستخدمة في القرار و هي الأسلوب الذي تمزج فيه المصادر المختلفة للمعلومات و التي تعتمد أساسا على مصدرين أساسيين هما خبرة متخذ القرار و المعاينة الإحصائية كما تعتمد هذه النظرية على القيمة المتوقعة لمجموعة البدائل المتاحة أمام متخذ القرار و ما يقابلها من حالات الطبيعة بحيث يتم اتخاذ القرار الذي يقابل القيمة المتوقعة المثلى من بين مجموعة القيم المتوقعة إضافة إلى ذلك فإنها تستخدم لتعديل الاحتمالات المتوقعة عندما يتضح لمتخذ القرار معلومات جديدة تتعلق بالتجربة التي ترتبط بها الحوادث و احتمالات وقوعها.

$$\textbf{P(A/B)} = \frac{P\,(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال:

لدينا صندوقين μ_1 ، μ_2

الصندوق (μ_1) به 13 كرة بيضاء و 5 حمراء

الصندوق (μ_2) به 10 كرات بيضاء و 12 حمراء

نقوم باختيار عشوائيا صندوق و نسحب كرة ثم نعيدها غلى الصندوق الذي سحبت منه، نكرر هذه التجربة n مرة

ملاحظة: إذا تحصلنا على كرة بيضاء فغنه في السحب المقبل نسحب مباشرة من الصندوق الأول μ_1 و إذا تحصلنا على كرة حمراء فإنه في السحب المقبل نسحب من الصندوق الثاني μ_2 .

1/ ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء في السحب الأول؟

2/ ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني؟

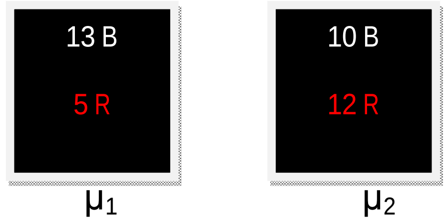
3/ ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء في السحب اثالث؟

الحل:

1/ احتمال الحصول على كرة بيضاء في السحب الاول:

نسمي B_1: حدث الحصول على كرة بيضاء في السحب الأول

R_1: حدث الحصول على كرة حمراء في السحب الاول



$p(\mu_1) = p(\mu_2) = ½$

$P(B_1/\mu_1) = 13/18 = 0.72$

$P(B_1/\mu_2) = 10/22 = 0.45$

$P(B_1) + P(R_1) = 1$

$P(B_1) = ??$

$B_1 = (B_1 \cap \mu_1) \cup (B_1 \cap \mu_2)$

$P(B_1) = P(B_1 \cap \mu_1) + P(B_1 \cap \mu_2)$

$= P(\mu_1)\, P(B_1/\mu_1) + P(\mu_2)\, P(B_1/\mu_2)$

$= ½\,(0.72) + ½\,(0.45) \Rightarrow \mathbf{P(B_1) = 0.58}$

$P(R_1) = 1 - (0.58) = 0.42 \Rightarrow \mathbf{P(R_1) = 0.42}$

2/ احتمال الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني:

$B_2 = (B_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap R_1)$

$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap R_1) \Rightarrow P(B_2) = P(B_1)\, P(B_2/B_1) + P(R_1)\, P(B_2/R_1)$

$P(B_2) = 0.58(13/18) + 0.42(10/22) = 0.6$

$P(B_2) = 0.6 \Rightarrow P(R_2) = 1 - 0.6 = 0.4$

3/ احتمال الحصول على كرة بيضاء في السحب الثالث:

$B_3 = (B_3 \cap B_2) \cup (B_3 \cap R_2)$

$P(B_3) = P(B_3 \cap R_2) + P(B_3 \cap R_2) \Rightarrow P(B_3) = P(B_2)\, P(B_3/B_2) + P(R_2)\, P(B_3/R_2)$

$P(B_3) = 0.6(13/18) + 0.4\,(10/22) = 0.61$

$P(B_3) = 0.61 \Rightarrow P(R_3) = 1 - 0.61 = 0.39$

4/ احتمال الحصول على كرة بيضاء في السحب n:

$B_n = (B_n \cap B_{n-1}) \cup (B_n \cap R_{n-1})$

$P(B_n) = P(B_n \cap B_{n-1}) + P(B_n \cap R_{n-1}) \Rightarrow P(B_n) = P(B_{n-1})\, P(B_n/B_{n-1}) + P(R_{n-1})\, P(B_n/R_{n-1})$

$P(B_n) = P(B_{n-1}) \times 13/18 + P(R_{n-1}) \times 10/22 \Rightarrow P(B_n) = P(B_{n-1}) \times 13/18 + (1 - P(B_{n-1})) \times 10/22$

$P(B_n) = (13/18 - 10/20)\, P(B_{n-1}) + 10/22$

$P(B_n) = 0.27\, P(B_{n-1}) + 10/22$

وهي متتالية حسابية و هندسية، نقوم بحل المعادلة:

$x=0.27x+10/22 \Rightarrow x = 0.61$

$0.61 = 0.27\,(0.61) +10/22 \Rightarrow P(B_n) = 0.27\,P(B_{n-1}) + 10/22$

$$(\underbrace{P(B_n) - 0.61}_{V_n}) = 0.27\,(\underbrace{P(B_{n-1}) - 0.61}_{V_{n-1}})$$

$V_n = 0.27\, V_{n-1}$

$V_n = r^{n-1}\, V_1$ متتالية هندسية

$V_n =(0.27)^{n-1}\, V_1$

$(P(B_n) - 0.61) =(0.27)^{n-1}\,(P(B_1) - 0.61)$

$P(B_n) =(0.27)^{n-1}\,(-0.3)+0.61$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0.61$$

ملاحظة: بعد إجراء عدد كبير من السحب فإن احتمال الحصول على كرة بيضاء = $0.61 > 1/2$

تقديم نظرية بايز:

لتوضيح هذه النظرية نقدم المثال التالي:

نفترض أن إحدى الشركات تسوق منتوجا في السوق حيث احتمال النجاح هو P، إذ نفترض أن P(A) الاحتمال الأولي لنجاح المنتوج و P(B) الاحتمال الأولي لفشل المنتوج

P(A/S): هو احتمال نجاح المنتوج بشرط أن الدراسة ناجحة

P(B/S): هو احتمال فشل المنتوج بشرط أن الدراسة ناجحة

P(S): احتمال نجاح الدراسة بشرط نجاح المنتوج

الاحتمال الكلي (نظرية بايز):

$$P(A/S) = \frac{P(A)\,P(S/A)}{P(A)P(S/A)+ P(B)P(S/B)}$$

$$P(B/S) = \frac{P(B)\,P(S/B)}{P(A)P(S/A)+ P(B)P(S/B)}$$

بعد توفر المعلومات ما هو احتمال نجاح كل منتوج.

يمكن تعميم نظرية بايز على n من الحالات

$$P(A_i/S) = \frac{P(A_i)\,P(S/A_i)}{P(A_1)P(S/A_1)+ P(A_2)P(S/A_2)+\cdots+P(A_i)P(S/A_i)+\cdots+P(A_n)P(S/A_n)}$$

باستعمال خاصية التجميع يمكن التعميم:

$$P(A_i/S) = \frac{P(A_i)\,P(S/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(S/A_i)}$$

مثال: ورشة إنتاجية تحتوي على 3 أنواع من المنتجات m_1,m_2,m_3 حيث تقوم كل منها بإنتاج نفس المنتوج و من الخبرة السابقة تم استخراج المعلومات التالية:

الآلة m_1 يقدر إنتاجها غير الصالح 3 %

الآلة m_2 يقدر إنتاجها غير الصالح 0.8 %

الآلة m_3 يقدر إنتاجها غير الصالح 1 %

تم أخذ عينة من إنتاج الورشة بمقدار 1000 وحدة موزعة كما يلي:

500 وحدة من إنتاج الآلة M_1

350 وحدة من إنتاج الآلة M_2

150 وحدة من إنتاج الآلة M_3

ثم تم وضعها في صندوق و أخلط جيدا، نأخذ وحدة من الصندوق، لوحظ بأنها غير صالحة ما هو احتمال أن تكون الوحدة المنتجة من M_1، M_2، M_3

الحل:

الاحتمال الأولي:

* احتمال أن تكون الوحدة المنتجة من m_1 هو $P(m_1) = \frac{500}{1000} = 0.5$

* احتمال أن تكون الوحدة المنتجة من m_2 هو $P(m_2) = \frac{350}{1000} = 0.35$

*احتمال أن تكون الوحدة المنتجة من m_3 هو $P(m_3) = \frac{150}{1000} = 0.15$

احتمال أن الوحدة تكون غير صالحة

* احتمال أن الوحدة غير صالحة من m_1 هو $P(S/m_1) = 0.03 = 3\%$

* احتمال أن الوحدة غير صالحة من m_2 هو $P(S/m_2) = 0.08= 8\%$

* احتمال أن الوحدة غير صالحة من m_3 هو $P(S/m_3) = 0.01 = 1\%$

تسمى S الوحدة المنتجة غير صالحة

احتمال إيجاد وحدة غير صالحة $P(S)$

$$P(S) = P(\underbrace{S \cap m_1}) + P(\underbrace{S \cap m_2}) + P(\underbrace{S \cap m_3})$$

$$P(S) = P(m_1)\, P(S/m_1) + P(m_2)\, P(S/m_2) + P(m_3)\, P(S/m_3)$$

$$P(S) = 0.5(0.03) + 0.35(0.008) + 0.15(0.01) = 0.0193$$

$$P(S) = 1 - 0.9807$$

احتمال أن تكون الوحدة المنتجة من m_1 غير صالحة حيث: $i = 1 , 2 , 3$

$$P(m_i/S) = \frac{P(m_i)\, P(S/m_i)}{\sum_{i=1}^{3} P(m_i)P(S/m_i)}$$

$$P(m_i/S) = \frac{P(m_i)\, P(S/m_i)}{P(m_1)P(S/m_1) + P(m_2)P(S/m_2) + P(m_3)P(S/m_3)}$$

$$P(m_i/S) = \frac{P(m_i)\, P(S/m_i)}{P(S)}$$

* احتمال أن تكون الوحدة المنتجة من m_1 غير صالحة:

$$P(S/m_1) = \frac{P(m_1)\, P(S/m_1)}{P(S)} = \frac{0.5 \times 0.03}{0.0193} = 0.777$$

* احتمال أن تكون الوحدة المنتجة من m_2 غير صالحة:

$$P(S/m_2) = \frac{P(m_2)\, P(S/m_2)}{P(S)} = \frac{0.35 \times 0.008}{0.0193} = 0.145$$

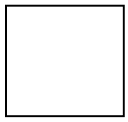
* احتمال أن تكون الوحدة المنتجة من m_3 غير صالحة:

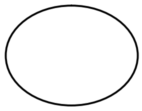
$$P(S/m_3) = \frac{P(m_3)\, P(S/m_3)}{P(S)} = \frac{0.15 \times 0.01}{0.0193} = 0.077$$

ملاحظة: بما أن احتمال الآلة m_1 ارتفع بعدما كان 0.05 إلى 0.777 يدل على أن الوحدات المنتجة من m_1 غير صالحة.

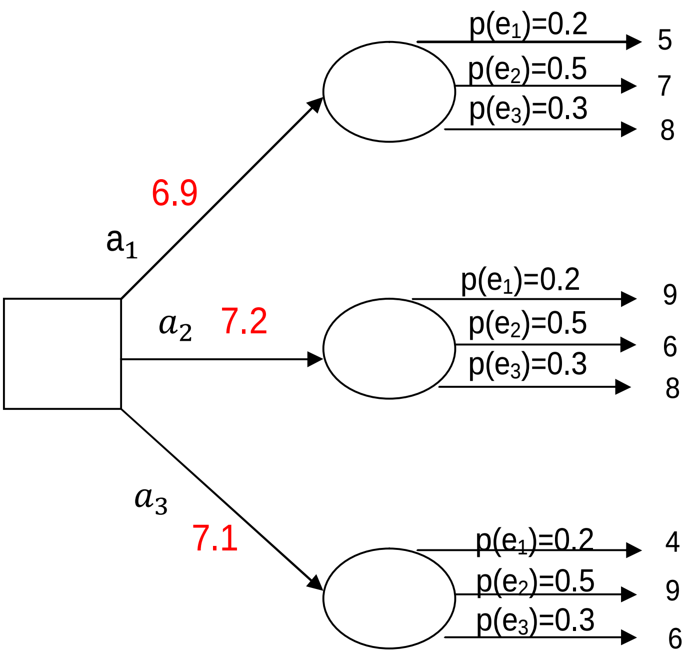
شجرة القرار:

إن جميع المشاكل المعالجة حتى الآن هي مشاكل


نقطة القرار


تمثل حالات الطبيعة (نقطة أحتمال)

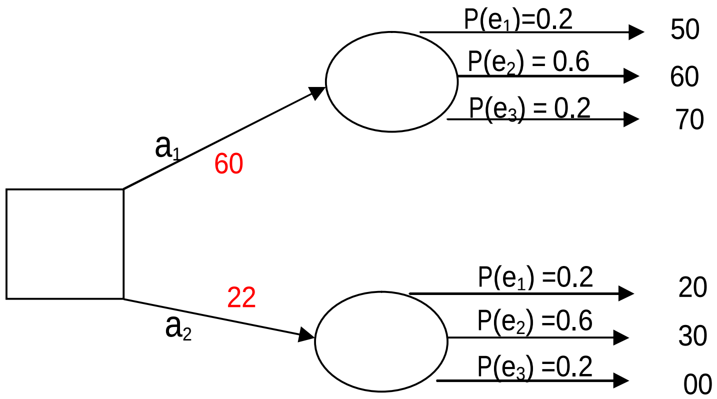
مثـــــــــــال: مصفوفة قرار (تكاليف)



E_j / A_i	e_1	e_2	e_3
a_1	5	7	8
a_2	9	6	8
a_3	4	9	6
$P(e_j)$	20 %	50 %	30 %

مثـــــــال(2): ليك المصفوفة التالية (مصفوفة أرباح) أرسم شجرة القرار

E_j \ A_i	e_1	e_2	e_3
a_1	50	60	70
a_2	20	30	00
$P(e_j)$	0.2	0.6	0.2



نحسب EMG ثم نختار إما **الأكبر** في المصفوفة **الأرباح** أو **الأقل** في مصفوفة **التكاليف**

$$EMG_1 = 50(0.2) + 60(0.6) + 70(0.2) = 60$$

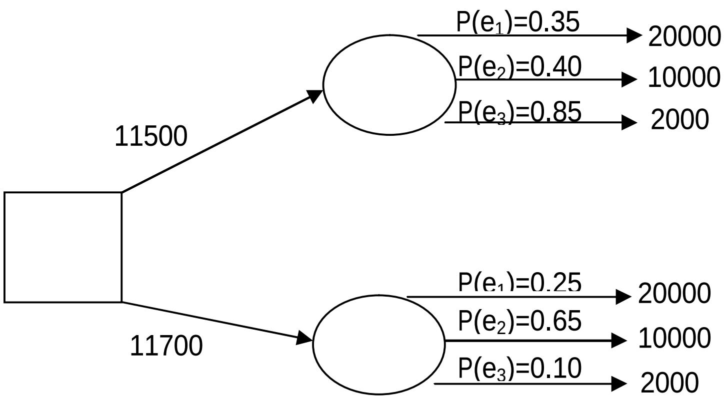
$$EMG_2 = 20(0.2) + 30(0.6) + 00(0.2) = 22$$

مثـــــــال(3): ترغب إحدى المؤسسات في تسويق أحد المنتوجين X و Y و من المتوقع أن يكون الطلب على المنتوجين و الأرباح المحققة في كل حالة موضح في الجدول التالي:

الأرباح		الاحتمالات		حالة السوق
Y	X	Y	X	
20000	20000	0.25	0.35	طلب مرتفع e_1
10000	10000	0.65	0.40	طلب متوسط e_2
2000	2000	0.10	0.25	طلب منخفض e_3

المطلوب: ما هو المنتوج الدي من المتوقع أن يحقق أعلى الأرباح .

رسم شجرة القرار



إذن التحليل بواسطة شجرة القرار يتضمن ما يلي:

1/ تمثيل المشكلة في شجرة القرار + البديل باستعمال معيار EMG

2/ حساب القيمة النقدية للمعلومة الصحيحة VEIP

3/ حساب الاحتمالات البعدية عن طريق الجدول

4/ إيجاد مصفوفة القرار بعد الدراسة

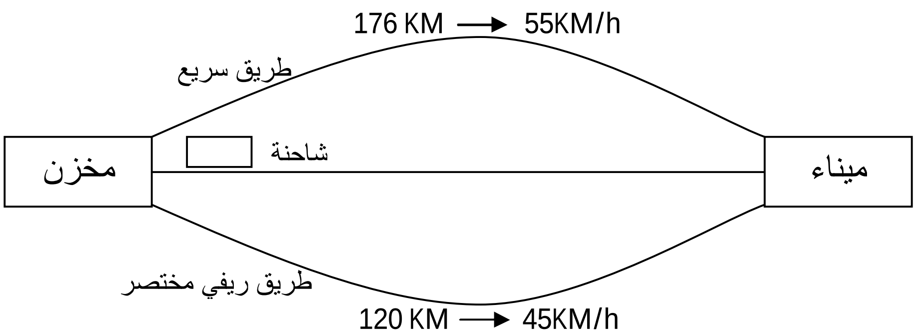
5/ حساب القيمة المتوقعة بعد الدراسة لكل بديل

6/ حساب القيمة المتوقعة لمعلومة العينة الإحصائية

7/ حساب درجة الكفاية (هل الهينة كافية لإجراء الدراسة أم لا)

تمرين:

إحدى المنظمات الخدمية المتخصصة بالنقل البري ترغب في تسيير شاحنة لنقل المواد الغذائية سريعة التلف من المطار إلى أحد الموانئ.



و قد علمت ما يلي :

1/ الطريق من المخزن إلى الميناء يمكن ان يكون كما يلي:

أ/ طريق سريع طول المسافة 176 كلم

ب/ طريق ريفي مختصر طول المسافة 120 كلم

2/ سرعة الشاحنة كما يلي:

أ/ على الطريق السريع 55 كلم/سا في حالة عدم هطول المطر

ب/ على الطريق السريع 50 كلم/سا في حالة هطول المطر

أ/ على الطريق المختصر 45 كلم/سا في حالة عدم هطول المطر

ب/ على الطريق المختصر 40 كلم/سا في حالة هطول المطر

على الطريق الريفي يوجد جسر أول على بعد 40 كلم و بسبب مستوى مياه النهر فإنه من الممكن ان يكون مغلق باحتمال 50 % عند هطول المطر

يضطر سائق الشاحنة باتخاذ قرار العودة و من ثم إلى استخدام الجسر الثاني الذي هو على بعد 10 كلم و ان احتمال غلق هذا الجسر عند هطول المطر هو 20 %

و حسب بيانات الأرصاد الجوية فإن احتمال هطول المطر هو بنسبة 50 % في المنطقة التي تسيير فيها الشاحنة المذكورة.

المطلوب:

1/ رسم شجرة القرارات رفق المراحل المختلفة للمشكلة

2/ تحديد الطريق الأفضل الذي سوف يسلكه صاحب الشاحنة إذا كانت المنظمة الخدمية ترغب بالوصل إلى الميناء بأسرع وقت ممكن.

حساب الحالات النقدية عن طريق الجداول:

S_i	$P(S_i)$	$P(I_i/S_i)$	$P(I_i \cap S_i)$	$P(S_i/I_i)$

احتمال مشترك: $P(I_i \cap S_i) = P(S_i)\, P(I_i/S_i)$

احتمال معدل: $P(S_i/I_i) = \frac{P(I_i \cap S_i)}{P(I_i)}$

5/ حساب القيمة المتوقعة بعد الدراسة لكل بديل VEE:

هو EMG بعد إجراء الدراسة

6/ حساب القيمة المتوقعة لمعلومة العينة الإحصائية VEIS:

(قبل الدراسة) VEIS = VEE – EMG

7/ حساب درجة كفاية المعلومات DIF:

$$DIF = \frac{VEIS}{VEIP} \times 100$$

* إذا كانت النسبة أقل من $DIF < 50\%$ فإن الدراسة غير موثوقة و غير مرضية ز منه هذه العينة (العينة غير كافية لإجراء هذه الدراسة)

* إذا كانت $DIF > 50\%$ فإن الدراسة موثوقة و مرضية و نافعة ومنه تقبل العينة

* إذا كان $DIF = 50\%$ فإن الدراسة لم تأتي بجديد

تمرين: يريد مدير الشركة أن يقرر بشأن إمضاء عقد مع شركة أخرى لذلك أمامه 3 اختيارات:

1/ إمضاء العقد d_1 أو d_2 أو d_3

في ظل وجود حالات الطبيعة : S_1 قبول الكثير من المستهلكين ، S_2 قبول القليل من المستهلكين

أما عن مصفوفة القرار فهي موضحة في الشكل التالي:

D_i \ S_j	S_1	S_2
d_1	20000	-20000
d_2	150000	20000
d_3	100000	60000
$P(S_j)$	0.3	0.7

* عرضت على المدير دراسة حول سلوك المستهلكين (من أجل الحصول على معلومات إضافية حول حالات الطبيعة مقابل تكلفة 10000 دج ، إضافية حيث الدراسات السابقة أدت إلى تحديد الاحتمالات البعدية التالية:

حالات الطبيعة	I_1 الدراسات ملائمة	I_2 الدراسات غير ملائمة
S_1	$P(I_1/S_1)=0.8$	$P(I_2/S_1)=0.2$
S_2	$P(I_1/S_2)=0.1$	$P(I_2/S_2)=0.9$

المطلوب :

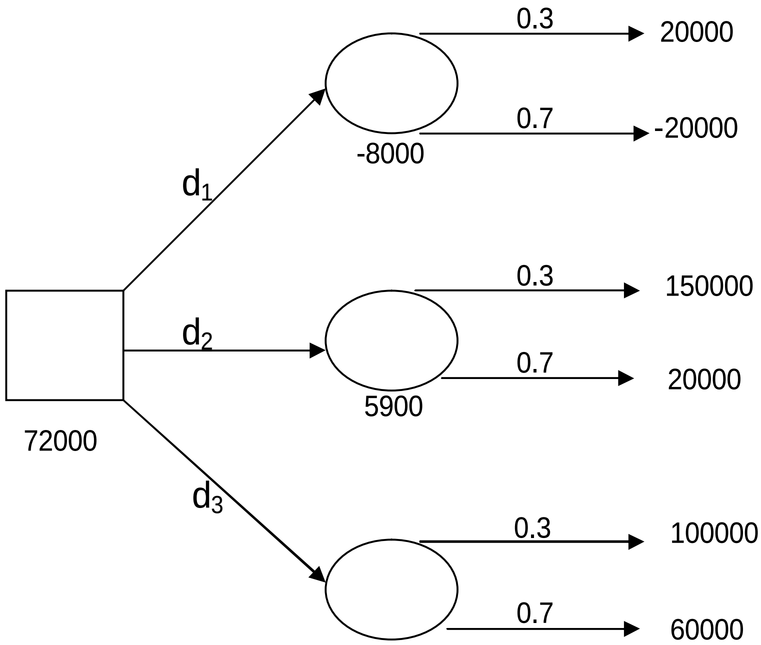
1/ ما هو أحسن قرار بدون إجراء أي دراسة

2/ أحسن القيمة المتوقعة بوجود المعلومات الإضافية

3/ ما هو القرار الأمثل بعد إجراء الدراسة

4/ حساب القيمتين: DIF , VEIS

الحل:



و منه يختار البديل الثالث $EMGd_1 = -8000$

و أحسن قرار قبل إجراء الدراسة : $EMGd_2 = 59000$

هو d_3 $EMGd_3 = -72000$

حساب VEIP : عند S_1 أفضل بديل هو d_2

عند S_2 أفضل بديل هو d_3

$$EMG_c = 150000(0.3) + 60000(0.7) = 870000$$

$$VEIP = EMG_c - EMGd_3 = 87000 - 72000 = 15000$$

3/ حساب الاحتمالات المعدلة:

$P(S_1) = 0.3$	$P(I_1/S_1) = 0.8$	$P(I_1/S_2) = 0.1$
$P(S_2) = 0.7$	$P(I_2/S_1) = 0.2$	$P(I_2/S_2) = 0.9$

مثلا: $P(I_1/S_1)$ هو احتمال أن يكون هناك قبول كبير من المستهلكين علما أن الدراسة ملائمة

$$P(S_i/I_i) = \frac{P(I_i \cap S_i)}{P(I_i)}$$

1/ إذا كانت الدراسة ملائمة I_1 :

$P(S_1/I_1)$, $P(S_2/I_1)$

$$P(S_1/I_1) = \frac{P(I_1 \cap S_1)}{P(I_1)} = \frac{P(S_1)\,P(I_1/S_1)}{P(I_1)}$$

$$P(I_1) = P(S_1 \cap I_1) + P(S_2 \cap I_2) = P(S_1)\,P(I_1/S_1) + P(S_2)\,P(I_1/S_2)$$

$$= 0.3 \times 0.8 + 0.7 \times 0.1 = \mathbf{0.31}$$

$$P(I_2) = P(S_1 \cap I_2) + P(S_2 \cap I_2) = 1 - P(I_1) = 1 - 0.31 = \mathbf{0.69}$$

الدراسة ملائمة I_1:

$$P(S_1/I_1) == \frac{P(S_1)\,P(I_1/S_1)}{P(I_1)} = \frac{0.3 \times 0.8}{0.31} = 0.774$$

$$P(S_2/I_1) == \frac{P(S_2)\,P(I_1/S_2)}{P(I_1)} = \frac{0.7 \times 0.1}{0.31} = 0.226$$

الدراسة غير ملائمة I_1:

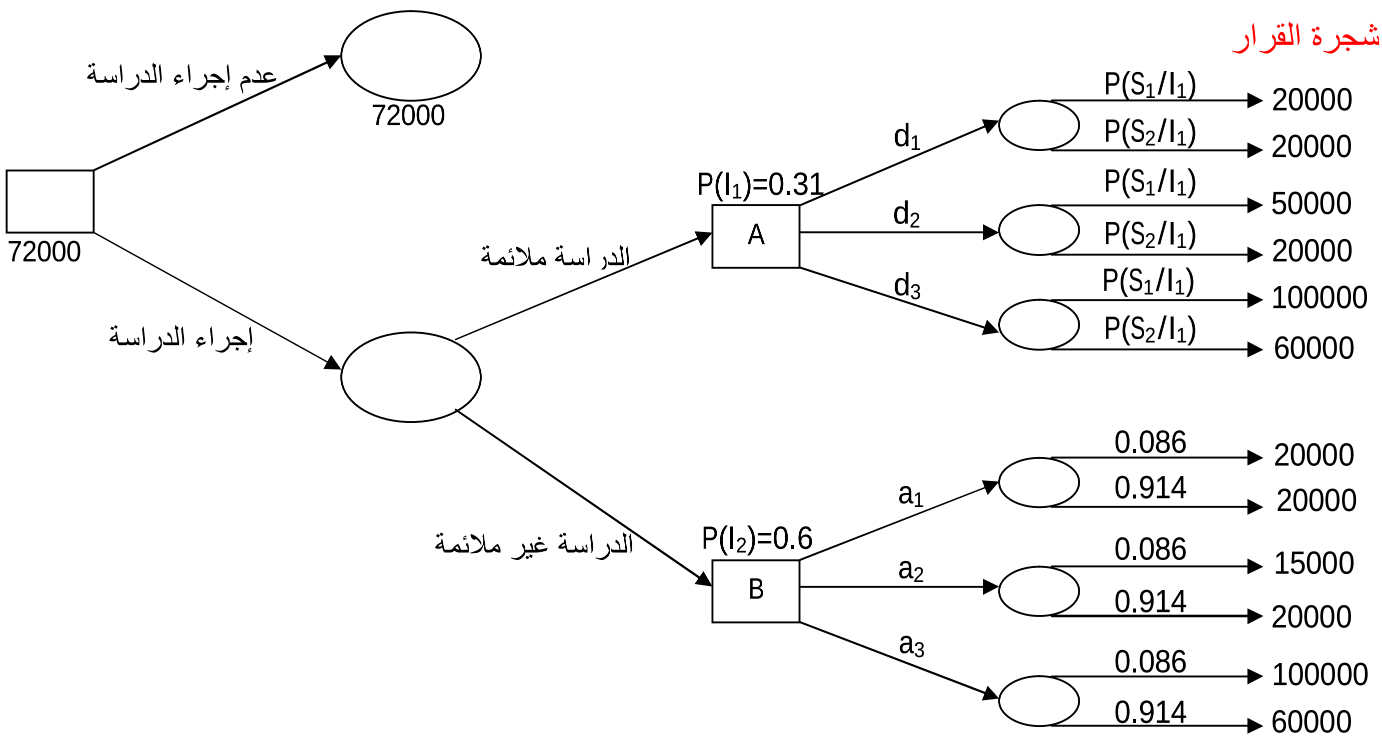
$$P(S_1/I_2) == \frac{P(S_1)\,P(I_2/S_1)}{P(I_2)} = \frac{0.3 \times 0.2}{0.69} = 0.086$$

$$P(S_2/I_2) == \frac{P(S_2)\,P(I_2/S_2)}{P(I_2)} = \frac{0.7 \times 0.9}{0.69} = 0.914$$

جدول الاحتمالات المعدلة:

S_i	$P(S_i)$	$P(I_l/S_i)$	$P(I_l \cap S_i)$	$P(S_i/I_i)$	
S_1	0.3	0.8	0.24	0.774	$P(S_1/I_1)$ دراسة ملائمة
S_2	0.7	0.1	0.07	0.226	$P(S_2/I_1)$
	1		$P(I_1)=1$	1	
S_1	0.3	0.2	0.06	0.86	$P(S_1/I_2)$ دراسة غ ملائمة
S_2	0.7	0.9	0.63	0.914	$P(S_1/I_2)$
	1		$P(I_2)=1$	1	

شجرة القرار



حساب القيمة المتوقعة عند كل نقطة قرار:

عند A:

$$\left\{\begin{array}{l} EMGa_1 = 10960 \\ EMGa_2 = 120620 \\ EMGa_3 = 90960 \end{array}\right.$$

أفضل بديل a_2

عند B:

$$\left\{\begin{array}{l} EMGa_1 = 16560 \\ EMGa_2 = 31180 \\ EMGa_3 = 63440 \end{array}\right.$$

أفضل بديل a_3

* عندما تكون الدراسة ملائمة فإن البديل الأمثل هو a_2

* عندما تكون الدراسة غير ملائمة فإن البديل الأمثل هو a_3

* حساب القيمة المتوقعة عند إجراء التجربة

VEE = 120620(0.31) + 63440(0.69) = 81165.8

* القيمة المتوقعة الصافية بعد إجراء الدراسة:

VEEN = 81165.8 – 10000 = 71165.8

* حساب القيمة المتوقعة لمعلومة العينة الإحصائية:

قبل الدراسة VEIS = VEE – EMG

مثلا إذا وجدنا أن القيمة المتوقعة عند إجراء الدراسة < من القيمة المتوقعة قبل إجراء الدراسة (ننصح الشركة بإجراء الدراسة

و في هذه الحالة يتم اختيار أفضل قيمة متوقعة بين نقطتي القرار A و B

و بما أن نقطة الاتصال تحتوي على احتمالات لا تستطيع اختبار القرار الأمثل و هنا نحسب درجة كفاية المعلومات

$DIF = \frac{VEIS}{VEIP} \times 100$ حيث VEIS = VEE – EMG

إذا كان:

DIF < 50% ⇐ الدراسة مرضية (ملائمة)

DIF > 50% ⇐ الدراسة غير مرضية (غير ملائمة)

التمرين الأول:

يقوم بائع تجزئة بشراء منتوج بقيمة 0.3 وحدة نقدية للعلبة ثم بيعه بـ 0.6 وحدة نقدية للعلبة علما بأن مفعول هذا المنتوج يزول بعد 5 أيام و اعتمد على نتائج التجارب السابقة تأكد البائع بأن الطلب على هذا المنتوج ينتمي إلى المجموعة:

{0,9,10,11,12} **أجب عما يلي**:

أنشئ مصفوفة القرار بعد تعيين مجموعة حالات الطبيعة E و البدائل A ؟

التمرين الثاني:

مؤسسة أصولها $(10.3)^6$ وحدة نقدية تريد أخذ قرار يقضي بالدخول في مشروع (بعث منتوج جديد) بعائد غير مؤكد، في حالة نجاح المشروع فإن أصول المؤسسة تزداد بـ $(10)^6$ وحدة نقدية و في حالة الخسارة فإن أصول المؤسسة تصبح $0.5\times(10)^6$ وحدة نقدية.

المطلوب:

أوجد أدنى احتمال لنجاح المشروع الذي يؤدي بالمؤسسة إلى قبول المشروع (EMG)؟

التمرين الثالث:

مربي دواجن يخشى من حدوث مرض الدجاج فإذا قام بتلقيح دجاجه وحدث مرض فإنه يحصل على صافي مقداره 5000 دج من البيع.

و لكن في حالة عدم حدوث مرض يحصل على ربح مقداره 10000 دج

عند عدم تلقيح فإنه في الحالة الأولى يحصل على ربح 1000 دج

عند عدم التلقيح فغنه في الحالة الثانية يحصل على ربح 15000 دج

علم من البيطري أن له (1/1000) من الحظ أن يحدث المرض

المطلوب :

1/ بين البدائل و حالات الطبيعة

2/ بين الاحتمالات القبلية (احتمالات حالات الطبيعة)

3/ اختيار البديل الأمثل بجدول الأرباح

4/ اختيار البديل الأمثل بجدول الندم

5/ حدد القيمة المتوقعة للمعلومة الكاملة (VEIP)

التمرين الرابع:

تخطط جمعية ثقافية لحفلا موسيقيا، أين حالة الطقس قد تكون ممطرة أو جميلة، إذا كان الطقس جميلا فيمكن إجراء الحفل في الهواء الطلق، عدد الحاضرين المتوقع هو 3000 شخص و تكلفة الدخول (سعر التذاكر) هي 1/2 وحدة نقدية، أما إذا كان الطقس ممطر فلن يحضر أي شخص للحفل، و هذا ما يفقد الجمعية 500 وحدة نقدية التي تعبر عن تكلفة تحضير الحفل، هذه التكلفة ستزداد بـ 100 وحدة نقدية إذا أجري الحفل داخل القاعة علما أن تكلفة الدخول لا تتغير فإذا كان الطقس ممطرا تتوقع حضور 1800 شخص بينما إذا كان الطقس جميلا فتتوقع حضور 1600 شخص.

هناك إمكانية إجراء الحفل في الهواء الطلق بدفع تأمين ضد الطقس يكلف 200 وحدة نقدية، فإذا كان الطقس ممطرا فإن الجدمعية تسترجع كل ما دفعته و هناك إمكانية أخيرة تتمثل في استئجار ساحة مغطاة في حديقة في حالة طقس جميل و 2200 شخص في حالة طقس ممطر.

المطلوب:

1/ حدد البدائل و حالات الطبيعة ثم أنشئ مصفوفة القرار.

2/ ما هو القرار الأمثل حسب معيار لابلاس؟

3/ إذا كان احتمال أن يكون الطقس ممطرا هو 75% ما هو القرار الأمثل؟

حل التمرين :

1/ حالات الطبيعة و البدائل

حالات الطبيعة :

e_1: طقس جميل

e_2: طقس ممطر

البدائل:

a_1: إجراء الحفل في الهواء الطلق

a_2: إجراء الحفل القاعة

a_3: إجراء الحفل في الساحة المغطاة

a_4: إجراء الحفل في الهواء الطلق بدفع تأمين

إنشاء مصفوفة القرار:

a_i \ e_j	e_1	e_2
a_1	1000	-500
a_2	200	300
a_3	800	00
a_4	600	200
$P(e_j)$	0.25	0.75

2/ القرار حسب معيار لابلاس:

$$\bar{X}a_1 = \frac{1000-500}{2} = 250$$

$$\bar{X}a_2 = \frac{200+300}{2} = 250$$

$$\bar{X}a_3 = \frac{800+00}{2} = 400$$

$$\bar{X}a_4 = \frac{600+200}{2} = 400$$

القرار الأمثل هو a_3 أو a_4

3/ حسب معيار القيمة المتوقعة

EMGa_1 = 1000(0.25)+(-500)(0.75)= 125

EMGa_2 = 200(0.25)+300(0.75) =275

EMGa_3 = 800(0.25)+00(0.75) =200

EMGa_4 = 600(0.25)+200(0.75) =300

حسب هذا المعيار أفضل بديل هو a_1

2 EMD

نظيرة المنفعة