المحاضرة الأولى : البرمجة الخطية *Linear Programming*

I. تعريف البرمجة الخطية:

يتكون مفهوم البرمجة الخطية من كلمتين هما:

- **برمجة *Programming***: تعني التقنية الرياضية المستعملة لإيجاد الحل الأمثل.
- **خطية *Linear***: تعني وجود علاقة خطية بين المتغيرات الداخلة في تركيب دالة الهدف والقيود وتمثل بخط مستقيم.

أما تعريف البرمجة الخطية فإنها تعتبر كإحدى الأساليب الرياضية التي تقوم على الإستخدام الرشيد للموارد المتوفرة (مادية، بشرية، ....الخ) والمتميزة بصفتي الندرة والمحدودية بهدف تحقيق هدف معين (تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف)، وهذا ضمن النموذج الرياضي المتكون من دالة الهدف والقيود في صورة معادلات أو متراجحات خطية (من الدرجة الأولى).

II. استخدامات البرمجة الخطية:

- المساعدة في اتخاذ القرارت المختلفة خاصة تلك المتعلقة بالوظائف الرئيسية للمؤسسة؛
- التخطيط والرقابة على الإنتاج؛
- المساعدة على تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل؛
- المساعدة في المفاضلة (الاختيار) بين طرق الإنتاج المتاحة؛
- المساهمة في تحديد أفضل الطرق لتوزيع الإنتاج؛
- توزيع الموارد الإنتاجية المتاحة (يد عاملة، مواد أولية، مستلزمات الإنتاج المختلفة...) على العمليات الصناعية بما يحقق الاستخدام الأمثل لهذه الموارد (من خلال تحديد التوليفة المثلى للمنتجات)؛
- تحديد برامج إنتاج بما يضمن تقليل التكاليف أو تعظيم الأرباح مع الأخذ في الاعتبار الطلب المتوقع.

III. الشروط الأساسية لتطبيق البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية لا تصلح للإستخدام في حل كل المشكلات الإدارية، وإنما هي محددة بتوافر شروط تطبيقها، والتي هي على النحو التالي:

- يجب أن يكون هناك هدف واضح ومحدد تحديداً دقيقاً ويمكن صياغته في صيغة رياضية صريحة؛
- يجب أن تعكس الصيغة الرياضية للهدف المُراد تحقيقه علاقة خطية متجانسة من الدرجة الأولى؛
- يجب أن تكون الموارد المتاحة محدودة ويمكن استخدامها بطرق متعددة؛
- يجب أن تكون هناك بدائل مختلفة للمشكلة يمكن المفاضلة بينها للوصول إلى الهدف؛
- يجب أن تكون العلاقة بين الموارد المتاحة والمحدودة ومتغيرات الهدف المراد تحقيقه علاقات خطية متجانسة من الدرجة الأولى، وقابلة للصياغة في صورة معادلات رياضية صريحة؛
- يجب أن تتوفر المقاييس الكمية الدقيقة والمؤكدة لعناصر المشكلة موضوع البرمجة الخطية.

Scanné avec CamScanner

IV. مكونات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

تتمثل في العناصر التالية:

- **وجود دالة هدف محددة:** إما تعظيم الربح *Maximisation* أو تخفيض التكاليف *Minimisation*.
- **وجود عدد من المتغيرات القرارية** x_i : وهي المتغيرات التي تمثل المجاهيل في المشكلة قيد البحث.
- **وجود قيود أو محددات:** يتم التعبير عنها في شكل متباينات $\leq, \geq$ أو معادلات، حيث تعكس شروط وظروف المؤسسة التي يجب على متخذي القرار أخذها بعين الإعتبار.
- **شرط المنطق الإقتصادي (عدم السلبية):** وهذا شرط عام وأساسي لجميع أنواع البرمجة الخطية، حيث أن جميع قيم المتغيرات يجب أن تكون أكبر أو يساوي الصفر $x_i \geq 0$، لأنه من غير المنطقي القول بأن إنتاج مؤسسة معينة من المنتوجات يكون بالسالب.

V. صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

يُعد النموذج الرياضي ترجمة رياضية للمشكلة المراد حلها، حيث يهدف إلى عرضها وتوضيحها بطريقة رياضية صحيحة تمكن من الوصول إلى الحل الأمثل، ويمكن إتباع الخطوات التالية في صياغة النموذج الرياضي:

أ. **التعريف بالمتغيرات القرارية للمشكلة موضوع البرمجة الخطية:** وهي تلك المتغيرات الموجودة في مشكلة البرمجة الخطية والتي يمكن تغييرها حتى نتمكن من الوصول إلى الحل الأمثل.

ب. **التعريف بدالة الهدف:** وذلك من خلال التعريف بالهدف الرئيسي للمشكلة في صورة تعبيرية.

ت. **الصيغة الرياضية لدالة الهدف:** حيث يمكن صياغتها كالتالي:

$$Max/\ Min\ (z) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

كما يمكن صياغتها بالشكل التالي:

$$Max/\ Min\ (z) = C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+\ldots+C_nX_n$$

حيث أن:

Max تعني التعظيم و Min تعني التخفيض.

c_i: معاملات دالة الهدف، إما الربح الوحدوي أو التكلفة الوحدية لكل منتوج.

x_i: رموز للكميات المنتجة من كل منتوج وهي المجاهيل التي نبحث عنها.

i: عدد متغيرات النموذج والمقدرة بـ n.

ث. **الصيغة الرياضية للقيود:** يعبر عنها رياضيا في شكل معادلات أو متراجحات ذات الصيغة الرياضية التالية:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i (\leq, \geq, =) b_i$$

حيث:

a_{ij}: الكميات المستعملة من الموارد للحصول على إنتاج وحدوي من المتغيرات x_i.

b_i: الكميات المتاحة من المورد i.

i: عدد الأسطر وهي بعدد القيود m.

Scanné avec CamScanner

ز. عدد الأعمدة وهي يعدد المتغيرات أو المجاهيل n.

ج. **شرط المنطق الإقتصادي:** أي أن جميع قيم المتغيرات يجب أن تكون أكبر من أو تساوي الصفر.

مثال:

يعمل مصنع على إنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات، ولإنتاج وحدة واحدة من أي منتج يتم مزج مادتين من ثلاثة مواد أولية هي: M_1, M_2, M_3، وذلك بمقادير محددة حسب الجدول التالي:

المواد الأولية المستهلكة (كغ) للوحدة الواحدة			
	المنتج الأول	المنتج الثاني	المنتج الثالث
المادة الأولية M_1	3	0	2
المادة الأولية M_2	0	1	3
المادة الأولية M_3	5	4	0

كما يستطيع المصنع تأمين 400 كغ من المادة الأولية M_1 ، 300 كغ من المادة الأولية M_2، و350 كغ من المادة الأولية M_3. إذا علمت أن المصنع يحقق ربح قدره: 300 دج في الوحدة من المنتج الأول، 400 دج في الوحدة من المنتج الثاني، 750 دج في الوحدة من المنتج الثالث.

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي الذي يحدد للمصنع السياسة الإنتاجية المثلى؟

الحل:

لصياغة النموذج الرياضي الذي يحدد للمصنع السياسة الإنتاجية المثلى نتبع الخطوات التالية:

أ. **التعريف بالمتغيرات القرارية للمشكلة الإنتاجية موضوع البرمجة الخطية:**

ليكن:

x_1: عدد الكميات اللازم إنتاجها من المنتج الأول.

x_2: عدد الكميات اللازم إنتاجها من المنتج الثاني.

x_3: عدد الكميات اللازم إنتاجها من المنتج الثالث.

z: الأرباح الإجمالية التي يمكن أن يحققها المصنع من خلال انتاجه وتسويقه لكميات معينة من المنتجات الثلاثة.

ب. **التعريف بدالة الهدف:** يرغب المصنع في تعظيم أرباحه الإجمالية كنتيجة لإختياره توليفة معينة يشكلها من المنتجات الثلاثة.

ت. **الصيغة الرياضية لدالة الهدف:**

$$Max(z) = 300X_1 + 400X_2 + 750X_3$$

ث. **الصيغة الرياضية للقيود:**

قيود على المدخلات:

- قيد المادة الأولية M_1: $3X_1 + 2X_3 \leq 400$
- قيد المادة الأولية M_2: $X_2 + 3X_3 \leq 300$

Scanné avec CamScanner

- قيد المادة الأولية M_3: $5X_1+4X_2 \leq 350$

ج. شرط المنطق الإقتصادي (عدم السلبية): $X_1,X_2,X_3 \geq 0$

ومنه الشكل العام للنموذج الرياضي هو كالتالي:

$$\text{Max}(z) = 300X_1+400X_2+750X_3$$
$$3X_1+2X_3 \leq 400$$
$$X_2+3X_3 \leq 300$$
$$5X_1+4X_2 \leq 350$$
$$X_1,X_2,X_3 \geq 0$$

Scanné avec CamScanner

المحاضرة الثانية: طرق حل النماذج البرمجية الخطية

1- الطريقة البيانية: تستخدم هذه الطريقة لحل البرامج البيانية لحالة البرمجة الخطية حيث تقوم في الخطوة الأولى بتحويل المتراجحات إلى معادلات وفي الخطوة الثانية نقوم بحل جملة المعادلات وتحديد قيم المتغيرات x_i ونجدها من أجل حساب قيمة دالة الهدف نقوم بتعويض المتغيرات x_i في دالة الهدف.

مثال: ليكن النموذج الخطي التالي:

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 500x_1 + 300x_2 \\ \text{S/C} \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 900 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 700 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

تحويل المتراجحات إلى معادلات

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 900 \quad (1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 700 \quad (2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد: $x_2 = 900 - 4x_1$

بالتعويض في (2) نجد: $2x_1 + 3(900 - 4x_1) = 700$

$-10x_1 + 2700 = 700 \Rightarrow -10x_1 = -2000 \Rightarrow x_1 = 200$

نعوض قيمة x_1 في المعادلة

$2(200) + 3x_2 = 700 \Rightarrow x_2 = 100$

$\text{Max } Z = 500(200) + 300(100)$

$\text{Max } Z = 130000$

ملاحظة: تستخدم الحالة البيانية في حالة عدد المتغيرات يكون مساوي لعدد المتراجحات + المتغيرات

Scanné avec CamScanner

2- الطريقة البيانية: تستخدم عندما يكون عدد المتغيرات أقل أو يساوي 2 و تتلخص هذه الطريقة بتحديد المنطقة أو المستوى الذي يمثل مجموعة الحلول الممكنة للنموذج الخطي وبعدها يتم البحث عن تلك النقطة من المنطقة المثلى التي تعطي للدالة الهدف أفضل قيمة "أكبر قيمة" إذا كانت من النوع Max Z وأدنى قيمة إذا كانت من النوع Min Z أما خطوات الطريقة البيانية لحل نماذج البرمجة الخطية ستتعرف عليها من خلال المثال التالي:

مثال: ليكن النموذج الخطي التالي:

$$Max\ Z = 50x_1 + 40x_2$$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: حل النموذج بالطريقة البيانية

1- تحويل المتراجحات إلى معادلات

$$2x_1 + 5x_2 = 20 \quad (1)$$

$$8x_1 + 5x_2 = 40 \quad (2)$$

$$5x_1 + 6x_2 = 30 \quad (3)$$

2- نقوم برسم المستوي حيث المحور العمودي x_2 والمحور الأفقي x_1 ورسم المستقيمات الثلاثة

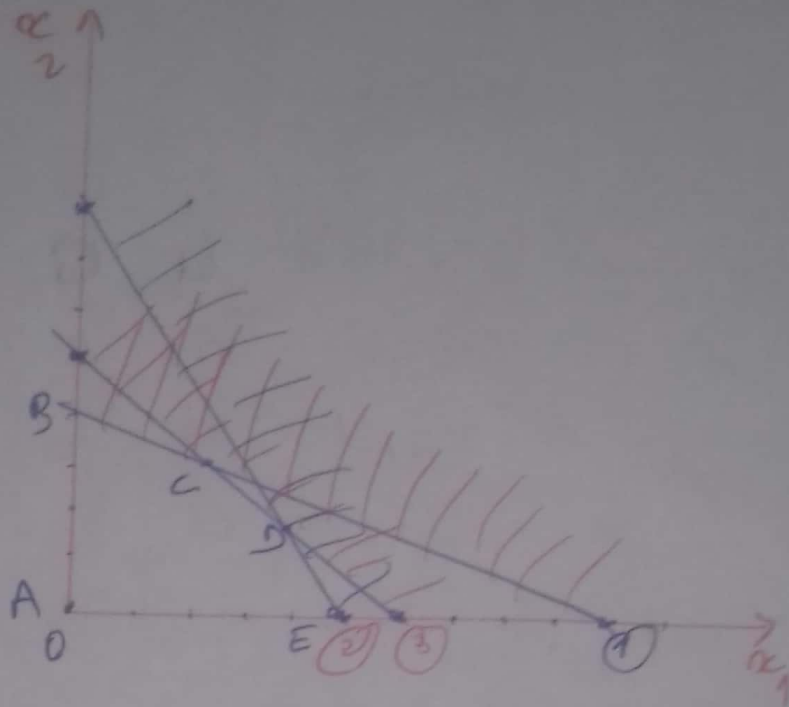
$5x_1 + 6x_2 = 30$	
x_2	x_1
5	0
0	6

$8x_1 + 5x_2 = 40$	
x_2	x_1
8	0
0	5

$2x_1 + 5x_2 = 20$	
x_2	x_1
4	0
0	10

(G)

Scanné avec CamScanner



1-3

عند يه منطقة المقبول و المنطقة المرفوضة تقوم بتعويض احداثيات نقطة المبدأ $(0,0)$ في المتراجحة (1) مثلا، فإذا احققت احداثيات هذه النقطة أي نقطة المبدأ للمتراجحة 1 فإننا نقبل المنطقة التي تحتوي نقطة المبدأ $(0,0)$ وترفض المنطقة الأخرى والعكس صحيح

* تحديد منطقة الحل:

* من خلال الشكل فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة الواقعة ضمن المضلع ABCDE

4- تحديد الحل الأمثل للنموذج الخطي: الحل الأمثل يكون واحدا من الرؤوس ABCDE، لكن اختيار يكون عندها Z أعظم ما يمكن

- تحديد احداثيات C:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 20 \ (1) \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \ (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30/13 \\ x_2 = 40/13 \end{cases}$$

- تحديد احداثيات D:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \ (2) \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \ (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 90/23 \\ x_2 = 40/23 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

5- حساب دالة الهدف:

الحل	x_1	x_2	$Max Z = 50x_1 + 40x_2$
A	0	0	0
B	0	4	160
C	30/13	40/13	138,46
D	90/23	40/23	256,21
E	5	0	250

6- اختيار الحل الأمثل: من خلال الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة لدالة الهدف تكون عند النقطة D، لكن يجب التأكد هل عند هذه النقطة تتحقق جميع قيود المسألة أم لا

القيود	الموارد المتاحة	عند النقطة D
$2x_1 + 5x_2$	20	16,52
$8x_1 + 5x_2$	40	40
$5x_1 + 6x_2$	30	30

من خلال الجدول نلاحظ أن الحل الأمثل يكون عند النقطة D حيث عند هذه النقطة تكون دالة الهدف أكبر ما يمكن وكذلك عند هذه النقطة تتحقق جميع القيود.

1- حالة وجود حل أمثل وحيد
2- " " ألف من حل أمثل
3- " " عدم وجود حلول
4- "

Scanné avec CamScanner

المحاضرة 03 : حل النموذج الرياضي باستخدام طريقة سمبلكس المبسطة (Simplex)

1. تعريف طريقة السمبلكس: تمتاز هذه الطريقة بقدرتها على حل النماذج الخطية ولعدد غير محدود من المتغيرات، على عكس الطريقة البيانية التي تستعمل فقط لحل البرامج الخطية التي تتضمن متغيرين اثنين فقط، ونظرا أن أغلب المسائل في الحياة العملية تحتوي على عدد كبير من المتغيرات فإنه يتم اللجوء في العادة إلى استخدام طريقة سمبلكس، وهي طريقة تكرارية تعتمد على عدد من الحلول حيث يتم الانتقال من جدول إلى آخر مع تحسين قيمة دالة الهدف في كل مرة إلى أن يتم التوصل إلى الجدول الأخير والذي يحتوي الحل الأمثل.

2. شروط طريقة سمبلكس للوصول إلى الحل الأمثل:

هناك شرطين أساسيين للوصول إلى الحل الأمثل هما:

- شرط الجملية: يشترط أن تكون جميع عناصر عمود الحلول موجبة (أكبر أو تساوي الصفر) حتى ننتقل إلى الجدول الذي يليه سواء كانت دالة الهدف من الشكل Max أو Min.
- شرط المثالية: يمكن اعتبار الحل حلا أمثليا إذا كانت جميع السطر $(c_j - z_j)$ أصغر أو يساوي الصفر في حالة دالة الهدف من الشكل Max، والعكس في حالة الهدف من الشكل Min أي يشترط أن تكون جميع عناصر السطر $(c_j - z_j)$ أكبر أو تساوي الصفر.

3. الصيغة القانونية والمعادلة للبرنامج الخطي:

- الصيغة القانونية:

أ- حالة التعظيم:

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_i$$

Scanné avec CamScanner

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Max(Z) = C'X$$

$$S/C \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث C' يعبر عن سعر معاملات دالة الهدف، A تعبر عن مصفوفة القيود، أما B فتعبر عن شعاع الثوابت.

ب- حالة التدنية:

$$Min Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum a_{ij} x_i \geq b_i$$

ج- الصيغة المختلطة:

$$Max/Min Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum a_{ij} x_i \geq \leq = b_i$$

4- خطوات استخدام طريقة سمبلكس: تتمثل في الخطوات التالية:

أ- تحويل البرنامج الخطي إلى الشكل المعياري.

ب- إيجاد الحل في جدول الحل الأولي.

ج- اختبار أمثلية الحل.

د- تحسين الحل إلى غاية التوصل إلى الحل الأمثل.

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Max Z = 7x_1 + 5x_2$$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 240 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

أوجد الحل الأمثل للبرنامج باستخدام طريقة سمبلكس.

أ- تحويل البرنامج الخطي إلى الشكل المعياري أو القياسي وذلك من خلال تحويل كل القيود من متراجحات إلى معادلات مع:

Scanné avec CamScanner

وعليه الشكل الحياري للمثال السابق هو كالتالي:

$$Max(Z) = 7x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{ح} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 240 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

ب- إيجاد الحل المبدائي (الأولي): الجدول T_0

	C_j		7	5	0	0	
	VB	B	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
0	x_3	100	2	1	1	0	50
0	x_4	240	4	3	0	1	60
	Z_0	0	0	0	0	0	
	$C_j - Z_0$		7	5	0	0	

(2) عنصر المحور

المتغيرات الأساسية

المتغير الداخل x_1 ⇐ أكبر قيمة

المتغير الخارج x_3

نلاحظ من خلال الجدول الأولي T_0 أن شرط المثالية غير محقق أي أن $C_j - Z_j$ قيم غير سالبة مما يستوجب تحسين الحل:

ج- تحسين الحل لإيجاد الحل المثلى:

* تحديد المتغير الداخل الى الأساس (تحديد عمود المحور): ننظر إلى السطر $C_j - Z_j$ ونأخذ أكبر قيمة في حالة Max والعكس المرجح بالنسبة إلى Min أي نأخذ أكبر قيمة مطلقة، فالمتغير الداخل

* تحديد المتغير الخارج من الأساس (تحديد سطر المحور): نقوم بحساب قيم θ وذلك بقسمة عناصر عمود الموارد على عمود المحور، أقل ناتج قسمة موجب يحدد المتغير الخارج في حالة Max و Min.

* تحديد عنصر المحور: هو العنصر المتقاطع فيه سطر المحور مع عمود المحور، وانطلاقا من هذا العنصر يمكن الانتقال إلى الجدول الموالي

* إدخال المتغيرات الإضافية (Xi) بإشارة موجبة على الطرف من الشكل أقل أو يساوي (≤)، وبإشارة سالبة على الطرف من الشكل أكبر أو يساوي.

* إدخال المتغيرات الوهمية أو الاصطناعية (Ai) وبإشارة موجبة على القيود من الشكل أكبر أو يساوي (≥) ويساوي فقط.

والجدول التالي يلخص كيفية إدخال المتغيرات (Xi) و (Ai)

إشارة القيد	قيد بعد إدخال المتغيرات	دالة الهدف Min	دالة الهدف Max
أقل من أو يساوي	$+X_i$	$+0X_i$	$+0X_i$
أكبر من أو يساوي	$-X_i + A_i$	$0X_i + MA_i$	$0X_i - MA_i$
يساوي	$+A_i$	$+MA_i$	$-MA_i$

ملاحظة:

* بالنسبة للمتغيرات الإضافية (Xi) فإن عائدها يساوي الصفر في دالة الهدف، ومعناها في قاموس أنها عبارة عن كمية مساحة عاطلة أو مستغلة، والهدف من استخدامها هو المساعدة في الوصول إلى الحل فقط.

* بالنسبة للمتغيرات الاصطناعية (Ai) فمعناها في قاموس أنها عبارة عن مواد ذات تكلفة عالية جدا تقدر بـ M (M هو عدد كبير جدا موجب يقدر بـ 100)، كما أنها لا تظهر في الحل النهائي، وإنما تستخدم للمساعدة في الوصول إلى الحل فقط. ومعاملها في دالة الهدف هو:

Max → $-MA_i$

Min → $+MA_i$

Scanné avec CamScanner

- عناصر سطر المحور الجديد: عناصر سطر المحور القديم / عنصر المحور
- عناصر بقية أسطر الجدول الجديد تحسب كالتالي:

العنصر الجديد = العنصر القديم - (عنصر المقابل له في سطر المحور × سطر المحور / عنصر المحور)

الجدول T_1:

Cj			7	5	0	0	θ
	VB	B	x_1	x_2	x_3	x_4	
7	x_1	50	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	100
0	x_4	40	0	(1)	-2	1	40
Zj		350	7	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	
Cj-Zj			0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	0	

(1)

$240 - \frac{(100 \times 4)}{2} = 40$

$3 - \frac{4}{2} =$

⇒ (1) عنصر ارتكاز للمتغير الداخل x_2 والخارج x_4

نلاحظ أن توجد في السطر Cj-Zj قيم موجبة فالجدول (T_1) ليس جدول الحل الأمثل

الجدول T_2:

Cj			7	5	0	0
	VB	B	x_1	x_2	x_3	x_4
7	x_1	30	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
5	x_2	40	0	1	-2	1
Zj		410	7	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
Cj-Zj			0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

$50 - \frac{\frac{40}{2}}{1} = 30$

نلاحظ أن جميع قيم السطر (Cj-Zj) سالبة فإن الجدول (T_2) هو جدول الحل الأمثل حيث:

$Max\ Z = 410$

$x_1^* = 30, x_2^* = 40, x_3^* = 0, x_4^* = 0$

Scanné avec CamScanner

المعاملة الرابعة: طريقة السمبلكس باستعمال تقنية M الكبيرة

المثال التالي يوضح أهم الفوارق في تطبيق السمبلكس بأسلوب (M) الكبيرة على عكس التقليل، والذي يهدف إلى إيجاد أقل التكاليف.

مثال:

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

النموذج المعياري:

$$\text{Min}(Z) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + MA_1 + 0x_4 + MA_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + A_1 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_4 + A_2 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

حسول الحل الابتدائي:

Cj			3	4	0	M	0	M	
	VB	B	x_1	x_2	x_3	A_1	x_4	A_2	
M	A_1	6	1	3	-1	1	0	0	2
M	A_2	4	1	1	0	0	-1	1	4
	Z_j	10M	2M	4M	-M	M	-M	M	
	$C_j - Z_j$		3-2M	4-4M	-M	0	M	0	

المتغير الداخل x_2 لأنه أكبر قيمة سالبة

A_1 خارج

$\frac{6}{3} = 2$ أصغر قيمة موجبة

من خلال جدول الحل الابتدائي نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل.

Scanné avec CamScanner

جدول T_1:

	c_j		3	4	0	M	0	M	
	VB	B	x_1	x_2	x_3	A_1	x_4	A_2	θ
4	x_2	2	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	/	0	0	6
M	A_2	2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	/	-1	1	3
	z_j		$\frac{4}{3}+\frac{2M}{3}$	4	$-\frac{4}{3}+\frac{M}{3}$	/	-M	M	
	c_j-z_j		$\frac{5}{3}-\frac{2M}{3}$	0	$\frac{4}{3}-\frac{M}{3}$	/	M	0	

$\frac{4}{3}-\frac{100}{3}$

$\frac{4-100}{3}=\frac{-96}{3}$

$\frac{5-200}{3}=\frac{-195}{3}$

جدول T_2:

	c_j		3	4	0	M	0	M
	VB	B	x_1	x_2	x_3	A_1	x_4	A_2
4	x_2	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	/	$\frac{1}{2}$	/
3	x_1	3	1	0	$\frac{1}{2}$	/	$-\frac{3}{2}$	/
	z_j	15	3	4	$-\frac{1}{2}$	/	$-\frac{5}{2}$	/
	c_j-z_j		0	0	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{5}{2}$	/

بما أن جميع قيم السطر c_j-z_j سالبة أو موجبة (≥ 0)
فالحل T_2 هو الحل الأمثل حيث:

$Min Z = 13$, $x_1^* = 3$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$

ملاحظة هامة:

* إذا خرجت متغيرة اصطناعية من الأساس فيمكننا الاستغناء عن حساب عناصر عمود المتغيرة الاصطناعية، لأنه خرجت نهائيا ولا يمكن أن تدخل إلى الأساس مرة أخرى.
* تحديد الأولية للخروج من الأساس في حالة تساوي (تعدد) النسب المتغيرة الاصطناعية.

Scanné avec CamScanner

المحاضرة الخامسة: المسائل الثنائية المرفقة بالبرمجة الخطية

1. تعريف النموذج الثنائي: هو عملية عكس النموذج الأولي بكل معطياته، أي عملية تحويل النموذج الممثل إلى نموذج ثنائي، بحيث تطبق على هذا الأخير كل العمليات والفرضيات والخصائص والشروط التي تطبق على النموذج الأصلي، إلا أنه يختلف عنه فقط فيما يخص المباغة.

2. خطوات تحويل النموذج الأولي (الأصلي) إلى النموذج الثنائي:

يمكن تلخيص خطوات تحويل النموذج الأصلي إلى نموذج ثنائي فيما يلي:

- إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأصلي من الشكل Max فإنها في النموذج الثنائي تصبح من الشكل Min والقيود كلها من الشكل أكبر أو يساوي ≥، والعكس صحيح. أما إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأصلي من الشكل Min فإنها في النموذج الثنائي تصبح من الشكل Max والقيود كلها من الشكل ≤.
- عدد متغيرات النموذج الأصلي يساوي عدد قيود النموذج الثنائي والعكس صحيح.
- عدد قيود النموذج الأصلي يساوي عدد متغيرات النموذج الثنائي والعكس صحيح.
- معاملات متغيرات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح قيم الطرف الأيمن (الموارد) للقيود في النموذج الثنائي والعكس صحيح.
- قيم الطرف الأيمن للقيود (الكميات المتاحة) في النموذج الأصلي تصبح معاملات متغيرات دالة الهدف في النموذج الثنائي والعكس صحيح.
- إذا كانت القيود في النموذج الأصلي من الشكل أقل أو يساوي فإنها في النموذج الثنائي تصبح من الشكل أكبر أو يساوي والعكس صحيح.
- تغيير رمز متغيرات في النموذج الأصلي مثلا من X_i الى y_i في النموذج الثنائي والعكس صحيح.

Scanné avec CamScanner

مثال 01:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max}(Z) = 50x_1 + 40x_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 175 \\ x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

النموذج المثانة

$$\Rightarrow \text{Min } Z = 175y_1 + 20y_2 + 3y_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 3y_1 + 0y_2 + 8y_3 \geq 50 \\ 5y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 40 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة:

- اذا كان النموذج القياسي ذا صيغة مختلطة (عامة) أي يحتوي على مزيج من المتراجحات من النوع ($\geq$ أو $\leq$)، فإنه يجب تحويله إلى الصيغة القانونية ثم تحويله إلى النموذج المثانة (الصيغة القانونية تعني أنه إذا كانت دالة الهدف في النموذج القياسي من الشكل Max فإن القيود يجب أن تكون كلها من النوع أقل أو يساوي وخلاف ذلك نضرب طرفي المتباينة (-1)).

أما اذا كانت دالة الهدف من الشكل Min فإن القيود يجب أن تكون كلها من النوع أكبر أو يساوي، وخلاف ذلك نضرب طرفي المتباينة (-1).

- لمعالجة القيود عندما تكون في حالة المساواة، يجب الإ تعبير عن كل قيد مساواة بقيدين أحدهما أكبر أو يساوي والآخر أقل أو يساوي وبعد ذلك تمثل جميع القيود حسب نوع دالة الهدف.

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max}(Z) = 8x_1 + 4x_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

المطلوب: أوجد النموذج الثنائي للنموذج الأصلي

الحل:

النموذج الأصلي ذو صيغة عامة (مختلطة) أي يحتوي على نموذج من كل نوع من النوع ($\leq$، $\geq$)، وبالتالي يتم تحويله إلى صيغة قانونية أي في حالة الهدف من الشكل Max يجب أن تكون كل قيوده من النوع أقل أو يساوي، ومنه نضرب طرفي المتراجحات الكبر أو يساوي (الأولى والثالثة) في الإشارة (-)، وعليه النموذج الأصلي يصبح كالتالي:

$$\text{Max}(Z) = 8x_1 + 4x_2$$

$$s/c \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 \leq -20 \\ x_2 \leq 5 \\ -x_1 - 3x_2 \leq -10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ومنه يكون النموذج الثنائي كالتالي:

$$\text{Min}(Z) = -20y_1 + 5y_2 - 10y_3$$

$$s/c \begin{cases} -4y_1 + 0y_2 - y_3 \geq 8 \\ -5y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

المحاضرة السادسة: نماذج النقل

تمهيد:

تعد مشاكل (نماذج) النقل حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية، بمعنى أن هذا النوع من المشاكل يمكن حله باستخدام البرمجة الخطية، إلا أن الوصول إلى الحل الأمثل يكون صعب جدا لأن عدد المتغيرات وعدد القيود يكون كبيرا نوعا ما، لذلك يتم اللجوء إلى استخدام نماذج النقل، لأن الأسلوب الذي توفره هذه الأخيرة هو الأكثر فاعلية وسرعة في الحل.

1- تعريف نموذج النقل:

إن مشكلة النقل تعتبر من الأساليب الرياضية الكمية المشتقة من البرمجة الخطية، والتي تدرس عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بتوزيع أو نقل كمية معينة من المنتجات من مصادر الإنتاج المتعددة إلى مراكز التوزيع أو الاستلام المتعددة، بحيث يكون مجموع تكاليف هذا النقل أقل ما يمكن.

2- تشكيل مصفوفة النقل: يتطلب تشكيل مصفوفة النقل ما يلي:

- معرفة الكميات المتاحة A_i حيث: $i = 1,2,3,\dots m$
- معرفة الكميات المطلوبة B_j حيث: $j = 1,2,3,\dots n$
- معرفة تكاليف النقل C_{ij} بين مراكز العرض التي تحتوي على الكميات المتاحة A_i ومراكز الطلب التي تحتوي على الكمية B_j.
- وضع المعلومات ضمن مصفوفات النقل.

X_{ij} هي الكميات المنقولة من مراكز i إلى مراكز الطلب j

دالة الهدف: من خلال الجدول يمكننا كتابة دالة الهدف على الشكل التالي:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

Scanné avec CamScanner

B_i / A_i	b_1	b_2	.....	b_j	.....	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	....	c_{1j} x_{1j}	....	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	....	c_{2j} x_{2j}	....	c_{2n} x_{2n}
⋮						⋮
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}		c_{ij} x_{ij}		a_n x_{in}
⋮						⋮
a_m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mj}		c_{mn} x_{mn}

3- طرق إيجاد الحل الأولي :

- طريقة الركن الشمالي
- طريقة أقل التكاليف
- طريقة فوجل

- **طريقة الركن الشمالي :** تعتمد هذه الطريقة على توزيع الكميات من اليسار إلى اليمين ابتداءا من الخلية الأولى بحيث يجب مراعاة الكميات المتاحة و الكميات المطلوبة أثناء التوزيع.

مثال :

إستخدم طريقة الركن الشمالي العلوي لتحديد الحل الأساسي لنموذج النقل الآتي :

Scanné avec CamScanner

المصانع	الأسواق			الإنتاج	
	A	B	C		
1	14 1200	12 200	10	1400	200 0
2	15	17 1400	13 100	1500	100 0
3	11	13	12 1550	1550	0
الطلب	1200 0	1600 1400 0	1650 1550 0	4450	

$$CT = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} C_{ij} X_{ij}$$

$$CT = 1200(14) + 200(12) + 1400(17) + 100(13) + 1550(12)$$

$$CT = 62450$$

• طريقة أقل تكلفة :

تتمثل هذه الطريقة في تشغيل الخلية التي بها أقل تكلفة في الجدول ككل، حيث يتم تشغيلها بأكبر عدد ممكن من الكميات مع مراعاة في ذلك الكميات المتاحة في العرض والكميات المطلوبة في المركز، ثم تكرار الخطوة السابقة وهكذا إلى أن تشبع كل المصانع وكل المراكز مشبعة.

ملاحظة:

في حالة تساوي التكلفة أقل لعدد من الخلايا فإنه يتم تشغيل الخلية التي بها أكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة

Scanné avec CamScanner

المصانع	أسواق A	B	C	الإنتاج	
1	14	12	10 1400	~~1400~~	0
2	15	17 1500	13	~~1500~~	0
3	11 1200	13 100	12 250	1550	~~350~~ ~~100~~ 0
الطلب	~~1200~~	~~1600~~	~~1650~~	4450	
	0	~~1500~~ 0	~~250~~ 0		

$CT = 1400(10) + 1500(17) + 1200(11) + 100(13) + 250(12)$

$\boxed{CT = 57000}$

أقل تكلفة من السابقة

- **طريقة فوجل:**

تعتبر هذه الطريقة أفضل في التطبيق لأنها تقوم على التوزيع حسب التكاليف، ويتم تلبيتها باتباع الخطوات التالية:

- حساب الفرق بين أقل تكلفة والتي تليها لكل سطر ولكل عمود.
- نختار السطر أو العمود المعني بالتشغيل (التوزيع) على أساس أكبر فارق تكلفة.
- بعد تحديد السطر أو العمود المعني بالتشغيل يتم اختيار الخلية التي بها أقل تكلفة فيه. ونوزع فيها.
- بعد عملية التشغيل يتم التخلص من السطر أو العمود إذا كان مشبع.
- تكرار نفس الخطوات السابقة إلى أن تشبع كل الأسطر والأعمدة المشبعة.

Scanné avec CamScanner

ملاحظة:

- الفرق يأخذ بالقيمة المطلقة
- عند تساوي الفوارق نوزع في الخانة ذات التكلفة الأقل.
- في حالة تساوي التكلفة الأقل بين خليتين أو أكثر يتم اختيار الخلية التي بها أكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة.

المصانع	الأسواق A	B	C	الإنتاج
1	14	12 — 1250	10 — 150	~~1400~~ ~~1250~~ 0
2	15	17	13 — 1500	~~1500~~ 0
3	11 — 1200	13 — 350	12	~~1550~~ 350
الطلب	~~1200~~ 0	~~1600~~ 350	~~1650~~ 150 0	4450

12-10=2
12-10=2
12-10=2

15-13=2
17-13=4

12-11=1
13-12=1
13-12=1

14-11=3

13-12=1
13-12=1
13-12=1
1

12-10=2
12-10=2
12-10=2

$$CT = 1250(12) + 150(10) + 1500(13) + 1200(11) + 350(13)$$

$$CT = 53750$$

Scanné avec CamScanner