حلول تمارين السلسلة رقم02:

تذكير: الطريقة البيانية تستخدم عندما يحتوي البرنامج على متغيرتين على الأكثر وذلك لاستحالة تصور المسألة على معلم يحتوي على أكثر من بعدين.

1. نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات، 2. نرسم المستقيمات الخاصة بالمعادلات على معلم متعامد، 3. نقوم بعملية شطب المنطقة التي لا تحتوي على حلول(تقع على يمين المستقيم في حالة كون القيد من الشكل ≤، وعلى يسار المستقيم في حالة كون القيد من الشكل ≥) ، 4. نحصل على مضلع يمثل منطقة الحلول، رؤوس المضلع تمثل حلولا ممكنة، 5. لتحديد النقطة المثلى نقوم برسم خط دالة الهدف ثم نقوم بنقل هذا الخط إلى الأعلى بالتوازي فنحصل على النقطة المثلى والتي هي: آخر نقطة يمسها هذا الخط في حالة Max، وأول نقطة يمسها هذا الخط في حالة Min.6. نقوم بحساب إحداثيتي هذه النقطة المثلى ونعوض في دالة الهدف فنحصل على قيمة أقصى ربح أو أدنى تكاليف.

الطريقة الجبرية: إيجاد الحل المشترك لمعادلات المستقيمات المتقاطعة فنحصل على قيمة المتغيرتين ثم نقوم بالتعويض في دالة الهدف. يتم التحقق من صحة النتائج بحساب إحداثيات بقية نقاط المضلع ثم التعويض في دالة الهدف ثم المقارنة بين القيم المتحصل عليها.

❖ التمرين الأول:

1- حل النموذج الرياضي بالطريقة الجبرية:

ط-1) نقوم بتحويل متراجحات قيود المسألة

إلى معادلات ثم نقوم بحل جملة معادلتين،

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 3 & \dots\dots\dots (1) \\ X_1 - 2X_2 = 2 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1)في العدد 2 ونجمعها مع المعادلة (2)فنحصل على:

$$5X_1 = 8 \Leftrightarrow X_1 = \frac{8}{5}$$

ومنه: $X_2 = \frac{-1}{5}$

(ترفض القيمة X_2 تقيدا بشرط اللاسلبية)

وبالتالي دالة الهدف:

$$MinZ = 6X_1$$
$$\Longrightarrow MinZ = 9.6$$

ط-2) نقوم بكتابة النموذج بصيغة المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A \quad X \quad = \quad B$$

DET (A) = (2×-2)-(1×1)=-5, DET(A) ≠0

La solution est possible (la matrice est inversible)

$$X_1 = \frac{(-2 \times 3) - (2 \times 1)}{-5} = \frac{8}{5}$$

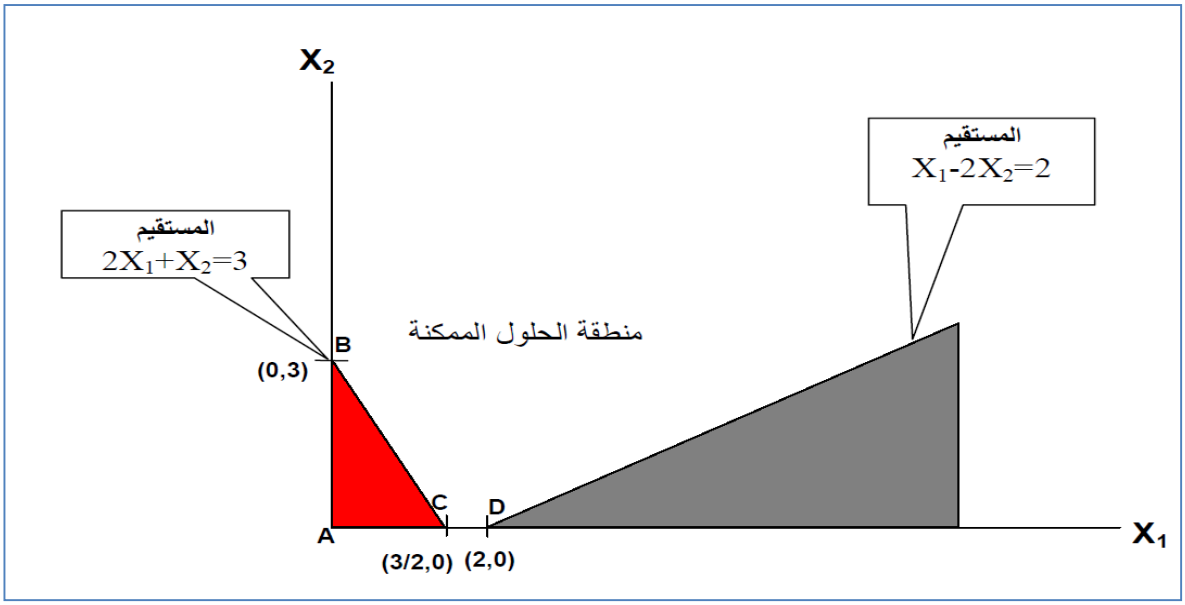
$$X_2 = \frac{(2 \times 2) - (3 \times 1)}{5} = \frac{-1}{5}$$

2- حل النموذج الرياضي بالطريقة البيانية:

أ. **تحويل المتراجحات إلى معادلات ورسم المستقيمات الخاصة بها:**

المستقيم (01)		
$2X_1 + X_2 = 3$		
X_1	0	3/2
X_2	3	0

المستقيم (02)		
$X_1 - 2X_2 = 2$		
X_1	0	2
X_2	-1	0



ب. **تحديد منطقة الحلول الممكنة:**

من خلال الشكل نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة هي المساحة المحصورة بين المحور العمودي الذي يمثل المتغير(X_2)، والنقاط B و C و D والمحور الأفقي الذي يمثل المتغير (X_1) .

ج. **تحديد الحل الأمثل:** يقع الحل الأمثل عند إحدى النقاط B أو C أو D

- حساب دالة الهدف:

النقطة	X_1	X_2	$MinZ = 6X_1 + 4X_2$
B	0	3	12
C	**$^3/_2$**	**0**	**9**
D	2	0	12

$$X_1^* = 1.5 \quad X_2^* = 0 \implies \text{MinZ} = 9$$

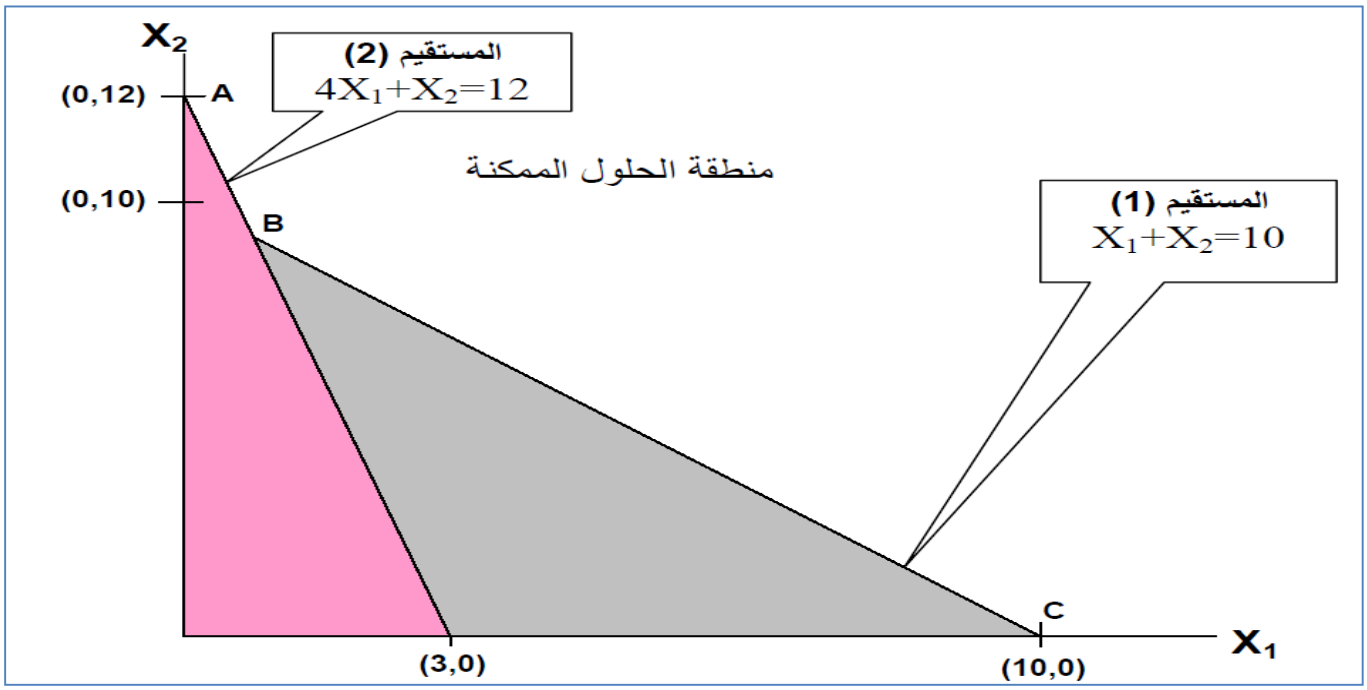
من خلال الجدول نلاحظ أن الحل الأمثل يكون في النقطة C حيث تكون دالة الهدف أقل ما يمكن وتحقق جميع القيود.

❖ **التمرين الثاني:**

أ. **تحويل المتراجحات إلى معادلات ورسم المستقيمات الخاصة بها:**

المستقيم (01)		
$X_1 + X_2 = 10$		
X_1	0	10
X_2	10	0

المستقيم (02)		
$4X_1 + X_2 = 12$		
X_1	0	3
X_2	12	0



ب. **تحديد منطقة الحلول الممكنة:**

من خلال الشكل نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة هي المساحة المحصورة بين المحور العمودي الذي يمثل المتغير(X_2)، والنقاط A و B و C والمحور الأفقي الذي يمثل المتغير (X_1) .

ج. **تحديد الحل الأمثل:**

بما أن دالة الهدف من النوع MaxZ والقيود مناقضة لها، فإنه لا يمكن تحديد حل نهائي ومحدد للدالة فكلما زادت قيم X_1 و X_2 فإن دالة الهدف تأخذ قيمة لا نهائية∞، (لا نهائية الدالة الاقتصادية).

التمرين الثالث:

1/ ايجاد الخطة الانتاجية لتحقيق أقصى رقم أعمال ممكن:

أ/ **تحديد النموذج الرياضي:**

1. **تحديد المتغيرات:**

X_1: عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الأول.

X_2: عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الثاني.

المنتوج	الإنتاج اليومي الكلي	الطاقة الإنتاجية لكل منتوج	سعر البيع للوحدة	التكلفة الوحدوية	الربح الوحدوي
X_1	16	8	100	20	80
X_2		14	90	30	60

الربح الوحدوي = سعر البيع للوحدة – التكلفة الوحدوية.

2. **تحديد دالة الهدف:** الهدف هو تعظيم رقم الأعمال.

$$MaxZ = 100X_1 + 90X_2$$

3. **تحديد قيود المسألة:**

$$X_1 + X_2 \leq 16$$

$$X_1 \leq 8$$

$$X_2 \leq 14$$

4. **شرط عدم السلبية:** $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

ومنه النموذج الرياضي للخطة الإنتاجية يكون على الشكل التالي:

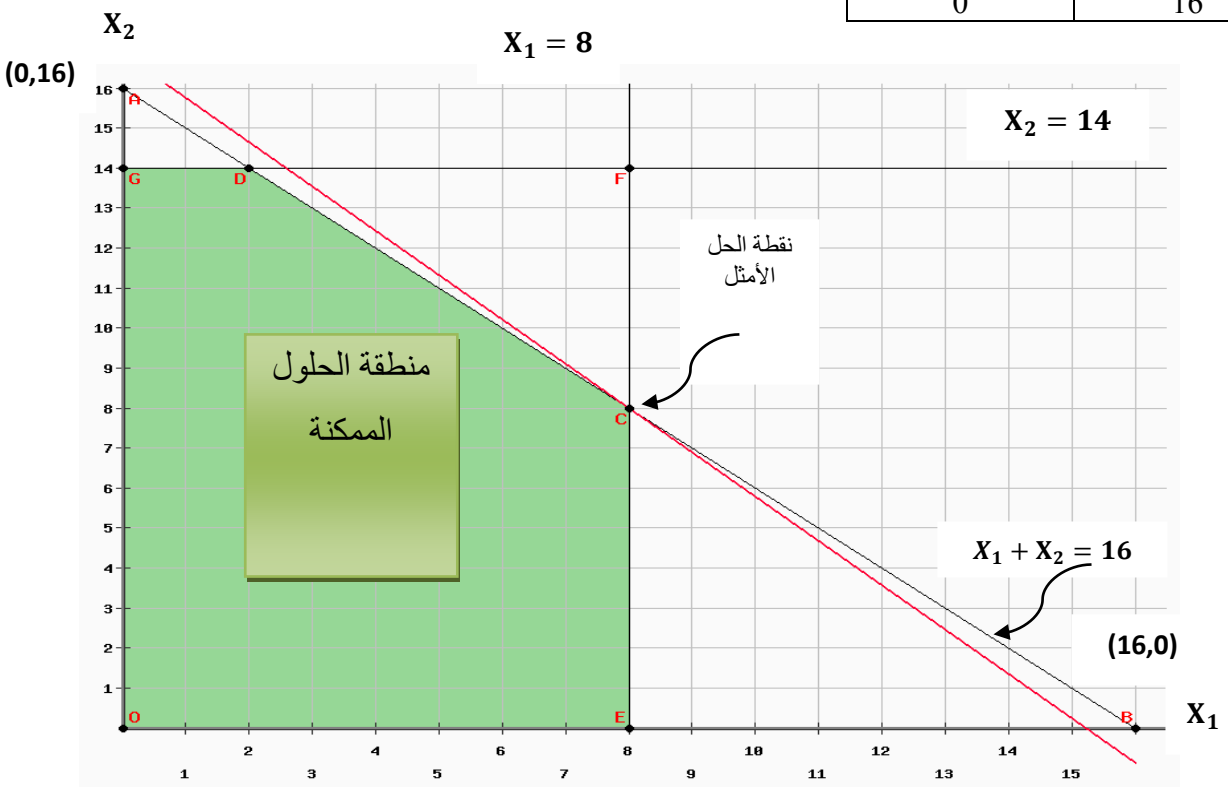
$$\begin{cases} MaxZ = 100X_1 + 90X_2 \\ \text{SLC} \\ X_1 + X_2 \leq 16 \\ X_1 \leq 8 \\ X_2 \leq 14 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

ب/ إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية:

***/تحويل المتراجحات إلى معادلات ورسم المستقيمات الخاصة بها:**

المستقيم الأول	
$X_1 + X_2 = 16$	
X_1	X_2
0	16
16	0

المستقيم الثاني:
$X_1 = 8$
المستقيم الثالث:
$X_2 = 14$



***/ تحديد منطقة الحلول الممكنة:** من خلال الشكل نلاحظ أن الحلول الممكنة تقع في المساحة ODGCE.

*/ **تحديد الحل الأمثل:**

يقع الحل الأمثل في إحدى النقاط O،G،D،C،E

*/ تحديد إحداثيات النقطة D : وذلك بحل جملة المعادلتين،

$$X_1 + X_2 = 16 \quad \Rightarrow X_1 = 2 \ , X_2 = 14$$
$$X_2 = 14 \quad \text{D}(2,14)$$

*/ تحديد إحداثيات النقطة C : وذلك بحل جملة المعادلتين،

$$X_1 + X_2 = 16 \quad \Rightarrow X_1 = 8 \ , X_2 = 8$$
$$X_1 = 8 \quad \text{C}(8,8)$$

- حساب دالة الهدف:

النقطة	X_1	X_2	$MAXZ = 100X_1 + 90X_2$
O	0	0	0
G	0	14	1260
D	2	14	1460
C	8	8	1520
E	8	0	800

من خلال الجدول نلاحظ أن الحل الأمثل يقع عند النقطة C حيث:

$$X_1^* = 8 \quad X_2^* = 8 \Rightarrow MaxZ = 1520$$

2/ **إيجاد الخطة الإنتاجية التي تمكن المؤسسة من تدنية التكاليف:**

أ/ تحديد النموذج الرياضي:

1. **تحديد المتغيرات:** تم تحديدها في السؤال الأول.
2. **تحديد دالة الهدف:** الهدف هو تدنية التكاليف.

$$MinZ = 20X_1 + 30X_2$$

3. **تحديد قيود المسألة:**

$$X_1 + X_2 \leq 16$$
$$X_1 \leq 8$$
$$X_2 \leq 14$$

4. **شرط عدم السلبية:**

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

ومنه النموذج الرياضي يكون على الشكل التالي:

$$\begin{cases} MinZ = 20X_1 + 30X_2 \\ \text{SLC} \\ X_1 + X_2 \leq 16 \\ X_1 \leq 8 \\ X_2 \leq 14 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

2/ إيجاد الخطة الإ

أ/ تحديد النموذج الـ

1. **تحديد المتغيرات:** تم تحديدها في السؤال الأول.
2. **تحديد دالة الهدف:** الهدف هو تعظيم الربح.

$$MaxZ = 80X_1 + 60X_2$$

3. **تحديد قيود المسألة:**

$$X_1 + X_2 \leq 16$$

$$X_1 \leq 8$$

$$X_2 \leq 14$$

4. **شرط عدم السلبية:**

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

ومنه النموذج الرياضي يكون على الشكل التالي:

$$\begin{cases} MaxZ = 80X_1 + 60X_2 \\ \text{SLC} \\ X_1 + X_2 \leq 16 \\ X_1 \leq 8 \\ X_2 \leq 14 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

ب/ إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية:

*/تحويل المتراجحات إلى معادلات ورسم المستقيمات الخاصة بها: أنظر السؤال الأول.

*/ تحديد منطقة الحلول الممكنة: من خلال الشكل نلاحظ أن الحلول الممكنة تقع في المساحة.ODGCE.

*/ تحديد الحل الأمثل: يقع الحل الأمثل في إحدى النقاط E،C،D،G،O

*/ تحديد إحداثيات النقطتين D و C : تم تحديدهما في السؤال الأول.

- **حساب دالة الهدف:**

$MAXZ = 80X_1 + 60X_2$	X_2	X_1	النقطة
0	0	0	O
840	14	0	G
1000	14	2	D
1120	8	8	C
800	0	8	E

من خلال الجدول نلاحظ أن الحل الأمثل يقع عند النقطة C حيث:

$$X_1^* = 8 \quad X_2^* = 8 \Longrightarrow MaxZ = 1120$$