4- الفصل الرابع: النموذج المقابل (الثنائي):

تساعد طرق حل النموذج الخطي متخذ القرار في توفير الحل الأمثل. لكن هذه البيانات ليس لها أهمية إذا لم يتم تفسيرها بشكل صحيح. إضافة إلى ذلك يمكن اجراء تحليلات اضافية ما بعد الأمثلية تفسر الحل وتوفر لمتخذ القرار بيانات إضافية لها أهمية بالغة. نذكر من بينها تحليل بيانات النموذج الثنائي وتحليل حساسية الحل الأمثل المتوصل إليه بدراسة مختلف التغيرات التي ستطرأ على الحل الأمثل في حالة تغير مختلف عناصر النموذج الرياضي مثل كمية الموارد المتاحة أو معاملات دالة الهدف أو تغير معاملات القيود. فهذه العناصر غالبا ما تكون مرتبطة بحالة عدم التأكد لأن محيط المؤسسة يعتبر غير ثابت وقابل للتغير الأمر الذي يفرض على متخذ القرار دراسة و تحليل المجال الذي يبقى فيه الحل أمثلا عن طريق دراسة تحليل الحساسية.

4-1- النموذج الثنائي: Dual Program

4-1-1- مفهوم النموذج الثنائي:

كل نموذج خطي أولي (أصلي) يتكون من مجموعة من المتغيرات ومجموعة من القيود، يمكن كتابته باستخدام نموذج ثنائي (مقابل) له. حيث تكون عدد متغيرات النموذج الأولي تساوي عدد قيود النموذج الثنائي. وعدد قيود النموذج الأولي تساوي عدد متغيرات النموذج الثنائي. والعكس صحيح. بمعنى أنه يمكن اعتبار النموذج الثنائي يمثل نموذج أولي لمقابله. ويكون النموذجين الأولي والثنائي متعاكسين في هدف الدالة. بمعنى أنه إذا كان النموذج الأولي يمثل تعظيم للأرباح (لأن متغيراته تقابل كمية الإنتاج). فان نموذجه الثنائي يمثل تدنية تكاليف استخدام موارد الإنتاج (لأن متغيراته تقابل كمية الموارد المستعملة في الإنتاج). بالإضافة الى أن تفسير الحل الأمثل للنموذج الثنائي بالغ الأهمية بالنسبة لمتخذ القرار. حيث يوضح فكرة أسعار الظل. والتي تبين مدى مردودية الوحدة الواحدة من وسائل الإنتاج. بمعنى إذا أضفنا وحدة واحدة من مورد معين فكم سيؤثر ذلك على دالة الهدف. ما يساعد متخذ القرار على معرفة مقدار مساهمة كل مورد من موارد الإنتاج المحدودة في تحقيق الربح.

بالإضافة الى أهمية النموذج الثنائي من حيث التفسير الاقتصادي لحله الأمثل. فهو أيضا يوفر بيانات الحل الأمثل للنموذج الأولي. بمعنى إذا صعب حل النموذج الأولي من حيث كثرة القيود أو المتغيرات، أو إضافة المتغيرات الاصطناعية. فانه من الممكن تحويله الى نموذج ثنائي واستنتاج الحل الأمثل للنموذج الأولي من خلال الحل الأمثل للنموذج الثنائي. والعكس صحيح. أي يمكن استنتاج الحل الأمثل للنموذج الثنائي من خلال الحل الأمثل للنموذج الأولي في آخر جدول للسمبلكس.

4-1-2- تحويل النموذج الأولي الى النموذج الثنائي:

هناك طريقتين للتحويل نذكر منها واحدة فقط باعتبارها الأسهل، بصياغة النموذج الثنائي من الشكل القانوني للنموذج الأولية، فاذا كان النموذج الأولي غير قانوني (مختلط). نحوله أولا الى الشكل القانوني. ليسهل تحويله الى النموذج الثنائي.

الصيغة العامة للعلاقة بين النموذج الأولي والثنائي:

النموذج الثنائي		النموذج الأولي
$[Min]F = \sum_{i=1}^{m} (b_i)' Y_i$	$\Leftrightarrow$	$[Max]Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
$\sum_{i=1}^{m} (a_{ij})' Y_j \geq (C_j)' \quad ; \; j = 1,2,...,n$	$\Leftrightarrow$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_i \quad ; \; i = 1,2,...,m$
$Y_i \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$x_j \geq 0$

نلاحظ أن في عملية التحويل يتم استعمال منقول مصفوفة القيود، بتبديل السطر الى العمود.

الصيغة المفصلة النموذجين الأولي والثنائي:

النموذج الأولي:

$$
\begin{aligned}
&[Max]Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \\
&S/c \\
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
&a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \leq b_2 \\
&... \\
&... \\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \leq b_m \\
&x_1, x_2, x_3, ..., x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

النموذج الأولي:

$$
\begin{aligned}
&[Min]F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \\
&S/c \\
&a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{m1} x_m \geq c_1 \\
&a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{m2} x_m \geq c_2 \\
&\ldots \\
&\ldots \\
&a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{mn} x_m \geq c_n \\
&y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m \geq 0
\end{aligned}
$$

مثال توضيحي: المطلوب تحويل البرنامج الخطي التالي الى النموذج الثنائي.

إذا كان النموذج الأولي من الشكل المختلط كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&[Min]Z = 8x_1 + 12x_2 \\
&S/c \\
&3x_1 + 5x_2 \leq 25 \\
&7x_1 + 12x_2 \geq 15 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

نحول أولا النموذج الأولي الى الشكل القانوني: (تم شرح هذا التحويل في آخر الفصل الأول)

$$
\begin{aligned}
&[Min]Z = 8x_1 + 12x_2 \\
&S/c \\
&-3x_1 - 5x_2 \geq -25 && \rightarrow \quad y_1 \\
&\ \ 7x_1 + 12x_2 \geq 15 && \rightarrow \quad y_2 \\
&\ \ 3x_1 \qquad\quad \geq 6 && \rightarrow \quad y_3 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

نلاحظ أن المتغيرات y_1, y_2, y_3 التي تنتمي الى النموذج الثنائي، تقابل القيود في النموذج الأولي.

إيجاد منقول مصفوفة القيود $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 3 \\ 5 & 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}'$

التحويل الى النموذج الثنائي:

$$[Max]F = -25y_1 + 15y_2 + 6y_3$$
$$S/c$$
$$-3y_1 + 7y_2 + 3y_3 \le 8 \qquad \rightarrow x_1$$
$$-5y_1 + 12y_2 \le 12 \qquad \rightarrow x_2$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الأولي من خلال سطر C_j-F_j للحل الأمثل للبرنامج الثنائي:

- القيمة المطلقة التي تقابل المتغيرات Y_i للنموذج الثنائي في سطر C_j-F_j، تمثل قيمة المتغيرات المتممة S_i للنموذج الأولي.
- القيمة المطلقة التي تقابل المتغيرات المتممة t_i في سطر C_j-F_j للنموذج الثنائي، تمثل قيمة متغيرات الانتاج X_i للنموذج الأولي.
- والعكس صحيح، حيث يمكن استنتاج حلول النموذج الثنائي من خلال حلول النموذج الأولي.
- قيمة دالة الهدف المثلى F للنموذج الثنائي هي نفسها قيمة Z في النموذج الأولي.

مثال توضيحي: مقارنة النتائج الأخيرة للحل الأمثل، بين النموذج الأولي وشكله الثنائي:

- الجدول الأخير الذي يمثل الحل الأمثل للنموذج الأولي:

الجدول-3		*Cj*	4	5	0	0	
B	C_B	$rhs=X_B$	x_1	x_2	S_1	S_2	**النسبة**
x_1	4	3	1	3/2	1/4	0	
S_2	0	5	0	1/2	-1/4	1	
***Z*=12**		Z_j	**4**	**6**	**1**	**0**	
		Cj-Zj	0	-1	-1	0	

- الجدول الأخير الذي يمثل الحل الأمثل للنموذج الثنائي (لنفس النموذج الأولي السابق):

3-الجدول		Cj	12	8	0	0	
B	$\boldsymbol{C_B}$	$\boldsymbol{Y_B}$	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$	$\boldsymbol{t_1}$	$\boldsymbol{t_2}$	**النسبة**
t_2	0	1	0	-1/2	-3/2	1	
y_1	12	1	1	1/4	-1/4	0	
$\boldsymbol{F=12}$		$\boldsymbol{F_j}$	**12**	**3**	**-3**	**0**	
		$Cj\text{-}Fj$	0	5	3	0	

ملاحظة: في حالة Max، تنتج قيم سالبة في سطر $C_j\text{-}Z_j$ لذلك يتم استنتاجها بالقيمة المطلقة في الحل.