نماذج الانحدار والارتباط

يقصد بنموذج الانحدار والارتباط صياغة علاقة بين ظاهرة معينة y ومجموعة من العوامل المفسرة لها $X_1, X_2, .. X_n$. وتصوير هذه العلاقة في شكل نموذج إحصائي، ويطلق عادة على المرحلة الأولى من هذه العملية التي تبدأ من تحديد قائمة هذه العوامل إلى صياغة النموذج بتحليل

الانحدار، بينما يطلق على المرحلة الموالية والخاصة بتقدير جــودة النمــوذج وإجــراء مختلــف اختبارات المعنوية الإحصائية بتحليل الارتباط.[1]
ويمكن التمييز بين نوعين من نماذج الانحدار:

- ❖ نماذج الانحدار البسيــط.
- ❖ نماذج الانحدار المتعــدد.

2-1:نماذج الانحدار البسيط

في هذه النماذج تقتصر العلاقة على متغيرين فقط.y ظاهرة تابعة وظاهرة مفســرة. ويكتــب النموذج من الشكل:[2]

$$t = 1,...,n \quad y_t = a_0 + a_1 X_t + \varepsilon_t$$

حيث:

y_t : متغير مفسر في الفترة t.

X_t : متغير مفسر في الفترة t.

a_0,a_1: معالم النموذج.

ε_t: متغير الخطأ.

n: عدد الملاحظات.

ولهذا النموذج جملة من الفرضيات:

H_1: يكون النموذج خطيا في X_t (أو في أية تحويل لـــ X_t).

H_2 : قيم X_t مشاهدة دون أخطاء (X_t ليس عشوائي).

H_3 : $E(\varepsilon_t) = 0$ الأمل الرياضي لمتغير الخطأ معدوم.

H_4 : $E(\varepsilon_t^2) = \delta_t^2$ تباين الخطأ ثابت(*).

H_5 : $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) = 0$ إذا كان $t \neq t'$ الأخطاء غير مرتبطة.

H_6 : $COV(X_t, \varepsilon_t) = 0$ الخطأ مستقل عن المتغير المفسر.

وقد وضعت هذه الفرضيات كي يصبح بالإمكان استخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير معالم النموذج، هذه الطريقة التي تتلخص في إيجاد قيم a_0 و a_1 التي تجعــل مجمــوع مربعــات الانحرافات أصغر ما يمكن أي:

$$MinS = Min \sum_{t=1}^{t=n} \varepsilon_t^2 = Min \sum_{t=1}^{t=n} (y_t - a_0 - a_1 x_t)^2$$

ومن الممكن إيجاد a_0 وa_1 باستعمال حساب لتفاضل والتكامل وتكون النتيجة بحل المعادلتين:

$$\frac{\delta S}{\delta a_0} = 0 \quad و \quad \frac{\delta S}{\delta a_1} = 0$$

$$\sum x_t y - \hat{a}_0 \sum x_t - \hat{a}_1 x_r^2 = 0$$

---

[1] عبد العزيز شرابي، طرق إحصائية للتوقع الإقتصادي، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، 2000 ، ص104.

[2] Régis Bourbonnais, Econométrie, (Paris:3eme édition, Dunod, 2000), p19.

(*) هذه الفرضية تسمى فرضية تجانس الأخطاء (Homoscédasticité)

أي: $\sum y_t - n\hat{a}_0 - \hat{a}_1 \sum x_t = 0$

ونحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{t=n} (x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y})}{\sum_{t=1}^{t=n} (x_t - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{t=1}^{t=n} x_t y_t - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{t=1}^{t=n} x_t^2 - n\overline{x}^2}$$

$$\hat{a}_0 = \overline{y} - \hat{a}_1 \overline{x}$$

حيث $\overline{x}$ هو الوسط الحسابي للمشاهدات x_t و $\overline{y}$ هو الوسط الحسابي للمشاهدات y_t.

وبتعويض قيمتي $\hat{a}_0$ و $\hat{a}_1$ في معادلة النموذج المقدر $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$ نحصل على معادلة انحدار y على x.

بعد تقدير معالم النموذج نقوم بالتحقق من دقة هذا النموذج واختبار معنويته، بحساب معامل التحديد ومعامل الارتباط باستخدام العلاقة التالية:[1]

- **معامل الارتبـــاط:**

$$r = \frac{\sum xy}{ns_x s_y}$$

حيث x,y هي قيم المشاهدات الممركزة بالنسبة لوسطها و s_x,s_y هي الانحرافات المعيارية في العينة.

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n}}, \qquad S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n}}$$

كما يمكن التعبير عن هذا المعامل بـــ:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{\sum (y - \overline{y})^2} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

ثم نقوم بحساب: $r = \sqrt{r^2}$

- **معامل التحديد:**

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_t - \overline{y})^2}{\sum (y_t - \overline{y})^2} = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum (y - \overline{y})^2}$$

وتتراوح قيمة r مابين 1 و −1 فكلما كانت قريبة من الواحد دل ذلك على وجود علاقة قوية بين X وY ما الإشارة فهي تدل على طبيعة العلاقة: طردية إذا كانت موجبة وعكسية إذا كانت سالبة.

ثم نقوم باختبار معنوية معامل الارتباط للتأكد من معنوية الإحصائية ويستخدم عند لعينات الصغيرة المتوسطة الصيغة التالية.

$$T_{cal} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

فإذا كانت $|t_{cal}|$ اكبر من قيمة t المجدولة T عند n-2 درجة حرية ومستوى دلالة قدره $\alpha\%$ نقول أن r معنوي ولم نتيجة الصدفة وذلك باحتمال قدره: $(1-\alpha)\%$.

[1] :J. Jonston, **Méthodes économétriques**, (Paris: économica, 1985), p29.

وفي مرحلة أخيرة نقوم بالتوقع باستخدام معادلة الانحدار الخطية البسيطة وهذا بمجال ثقة بـــ $(1-\alpha)\%$ يعطى بالعلاقة التالية.

$$y_{n+1} = \hat{y}_{n+1} \pm t_{n-2}^{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum_t (x_t - \bar{x})^2} + 1}$$

حيث: y_{n+1} = قيمة y المتوقعة.

$\hat{y}_{n+1}$ = قيمة y المقدرة من معادلة الانحدار.

$t_{n-2}^{\alpha/2}$ = قيمة توزيع ستودنت النظرية عند مستوى الدلالة $\alpha\%$ ودرجة حريـــة قـــدرها *n-2*.

2-2: نماذج الانحدار المتعدد

نموذج الانحدار المتعدد هو عبارة عن تعميم لنموذج الانحدار البسيط، وهذا الأخير الذي يتميز بقصوره في اعتماده على متغير تابع واحد لتفسير ظاهرة معينة تابعة بينما في نموذج الانحـــدار المتعدد يصاغ نموذج إحصائي يضم المتغير التـــابع y ومجموعـــة مـــن المتغيـــرات المفســـرة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ويكتب شكله لعام كالتالي:[1]

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \ldots\ldots\ldots + a_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

حيث: $t = 1, \ldots\ldots, n$

y_t : متغير مفسر في الفترة t.

x_{1t} : المتغير المفسر الأول في الفترة t.

x_{2t} : المتغير المفسر الثاني في الفترة t.

x_{kt} : المتغير المفسر رقم k في الفترة t.

$a_0\ a_1 \ldots\ldots a_k$: معالم النموذج.

ε_t : متغير الخطأ (التشويش).

n: عدد الملاحظات.

ويمكن كتابة النموذج السابق في شكل مصفوفات على الشكل التالي:

$$y_1 = a_0 + a_1 x_{11} + a_2 x_{21} + \ldots\ldots\ldots + a_k x_{k1} + \varepsilon_1$$
$$y_2 = a_0 + a_1 x_{12} + a_2 x_{22} + \ldots\ldots\ldots + a_k x_{k2} + \varepsilon_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \ldots\ldots\ldots + a_k x_{kt} + \varepsilon_t$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = a_0 + a_1 x_{1n} + a_2 x_{2n} + \ldots\ldots\ldots + a_k x_{kn} + \varepsilon_n$$

فنكتب على الشكل:

$$y_{(n,1)} = x_{(n,k+1)(k+1,1)} + \varepsilon_{(n,1)}$$

---

[1] : Regis Bourbonnais, op.cit, p47.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{1t} & x_{2t} & \cdots & x_{kt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_t \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ولهذا النموذج جملة من الفرضيات:[1]

1- ε_t: تخضع للتوزيع الطبيعي بتوقع معدوم وتباين ثابت أي: $\varepsilon_t \rightarrow N(0, \delta)$.

2- لا يوجد ارتباط ذاتي بين الأخطاء أي: $E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0$.

3- لا يوجد ارتباط ذاتي بين الأخطاء وبين المتغير X_t و ε_t أي $E(\varepsilon_t, x_t) = 0$.

- **<u>تقدير معالم النموذج:</u>**

لتقدير معالم نموذج الانحدار المتعدد نستخدم طريقة المربعات الصغرى مثلما رأينا في النموذج السابق لدينا:

$$y = xa + \varepsilon$$

$$\hat{y} = \hat{x}\hat{a}$$

$$e_t = y_t - \hat{y} = y - xa$$

$$Min \sum e_i^2 = Min \ (y - xa)'(y - xa) = MinS$$

ثم نقوم باشتقاق المعادلة بالنسبة لـــ a فنحصل على شعاع المعالم المقدرة[2]

$$\hat{a} = (x'x)^{-1} x'y$$

حيث x' هو مقلوب المصفوفة x.

وبعد عملة التقدير نقوم باختبارات معنوية والتأكد من جودة النموذج حيث نبدأ باختبار المعنوية الكلية، ثم نقوم بالاختبار:[3]

$$\begin{cases} H_0 : a_0 = a_1 = a_2 = \dots\dots\dots\dots \ \dots\dots\dots\dots \ \dots = a_n = 0 \\ H_1 : \exists a_t \neq 0 \end{cases}$$

ومن أجل ذلك نقوم باستخدام إحصاءة فيشر F حيث:

$$F(K, n-k-1) = \frac{\hat{a}'x'y / k}{e'e / n-k-1}$$

أو الصيغة:

$$F(K, n-k-1) = \frac{R^2 / k}{(1-R^2) / n-k-1}$$

حيث R^2 هو معامل التحديد الإجمالي، ويحسب كالآتي:

---

[1] : عصام عزيز شريف/ **مقدمة في القياس الاقتصادي**، (الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية، 1979)، ص156.

[2] : جمال فروخي، **نظرية الاقتصاد القياسي**، (الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية، 1992)، ص53.

[3] : Gilbert Saporta, **Probabilités, analyse des données et statistique**, (Paris Med tchini, 1990), p375.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2}$$

فإذا كانت قيمة F_c المحسوبة أكبر من قيمة f_t المجدولة وفقا لدرجة من الثقة محددة ودرجـــات حرية *(n-k-1,k)* نقول أن النموذج معنوي وهناك على الأقل عامل واحد مستقل يمارس تأثيره على y وتقبل H_1. أما في الحالة المعاكسة فنرفض H_1 ونقبل H_0.

بعد التأكد من المعنوية الإحصائية للنموذج يتم الانتقال إلى اختبار معنوية كل متغير تفســيري على حدة، ولأجل هذا نستخدم إحصاء ستودنت حيث نقوم بالاختبار التالي:

$$\begin{cases} H_0 : a_t = 0 \\ H_1 : a_t \neq 0 \end{cases}$$

ثم نقوم بحساب الإحصاء T حيث: $T_c = \frac{\hat{a}_i - a_i}{S_{\hat{a}_i}}$

حيث: $S_{\hat{a}_i}$ هو معلم التقدير غير المنحاز لانحراف العنصر القطري الواقع في السطر i والعمود j من المصفوفة $(X'X)^{-1}$.

ثم نقارن قيمة t_c مع القيم المجدولة لدرجة حرية *(n-k-1)* ولمستوى معنوية α، $0 < \alpha < 1$.

فإذا كانت قيمة T_c أكبر من قيمة T_t المجدولة نقول أن $\hat{a}_i$ معنوي أما إذ كان العكس فنقول أن $\hat{a}_i$ غير معنوي وينبغي إقصاء X_j من النموذج.