تقديم

تعيش المؤسسات في بيئات تتميز بالديناميكية، مما يفرض عليها استعمال تقنيات كمية في اتخاذ قراراتها، وهنا تظهر أهمية التنبؤ في :

- ضمان فعالية المؤسسة من خلال المرونة مع البيئة الخارجية؛
- معرفة احتياجات المؤسسة في المدى القصير والمتوسط؛
- الحد من المخاطر التي قد تواجه المؤسسة؛
- إعطاء صورة واضحة عن التوجه المستقبلي للمؤسسة؛
- المساهمة بقدر كبير في اتخاذ القرارات ومراقبة آثارها المستقبلية.

التنبؤ يعني وضع التقديرات حول ظاهرة اقتصادية معينة، باستخدام تقنيات رياضية إحصائية "نماذج القياس الاقتصادي"، فهو عملية يعتمد عليها المسيرون ومتخذو القرار في وضع التقديرات حول الأوضاع المستقبلية، وتمر عملية التنبؤ بالمراحل التالية:

- تحديد الهدف من التنبؤ؛
- تجميع البيانات اللازمة للظاهرة المدروسة؛
- تحليل البيانات؛
- اختيار النموذج المناسب من نماذج التنبؤ؛
- اتخاذ القرار.

1-تعريف نماذج القياس الاقتصادي

تعتبر نماذج القياس الاقتصادي وسيلة ذات أهمية بالغة في تفسير الظواهر الاقتصادية والتنبؤ بسلوكها المستقبلي، لأغراض أهمها البرمجة والتخطيط الاقتصادي، وهي عبارة عن معادلة أو مجموعة من المعادلات تتكون من ***متغيرات تابعة*** (داخلية) وأخرى ***مستقلة*** (خارجية)، بالإضافة إلى مجموعة من ***المعلمات والمتغيرات العشوائية***، وتشكل هذه المعادلات نظاما كاملا لتشبيه (تمثيل) مختلف نشاطات الاقتصاد.

ويتم بناء نموذج قياس اقتصادي لهدف تعليمي، أو علمي بحثي، بهدف التنبؤ، تحليل السياسة الاقتصادية واتخاذ القرار، وذلك اعتمادا على:

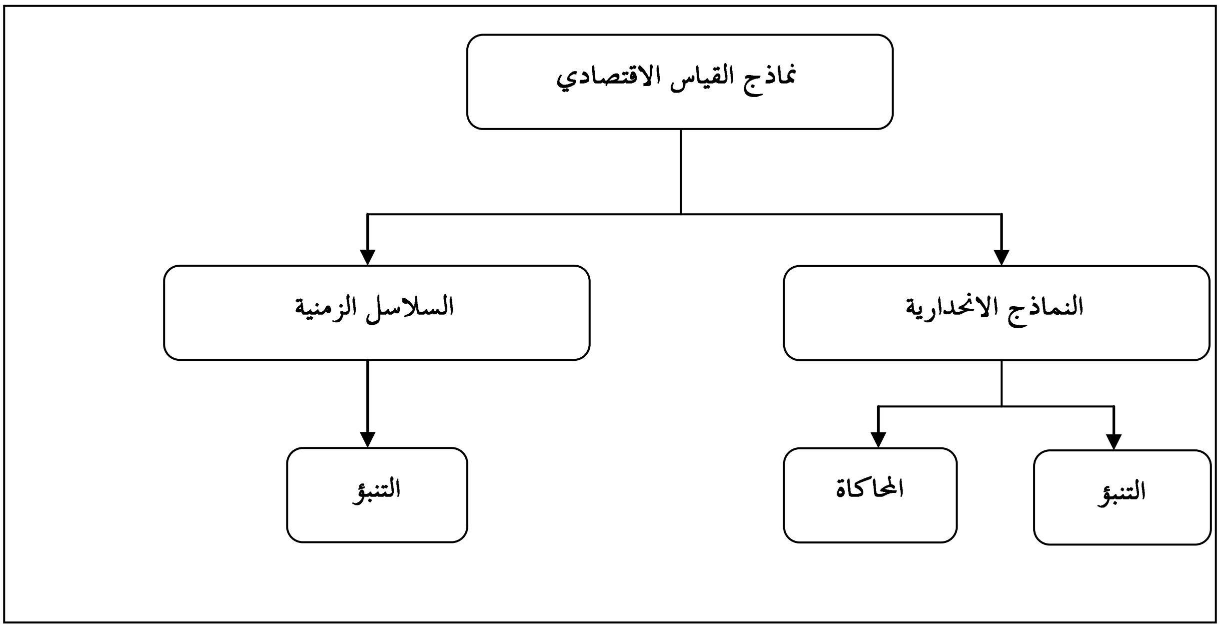
- **علم الاقتصاد:** يفيد في وضع هيكل النموذج النظري من خلال النظرية الاقتصادية "مبدأ أو مجموعة مبادئ معقولة ومتفق عليها لشرح أو تفسير ظاهرة اقتصادية معينة"، وعليه، لفهم ظاهرة

ما يقوم الباحث الاقتصادي بالبحث عن القوانين التي تسيرها، ومعرفة المتغيرات التي تحدد اتجاه مسارها المستقبلي؛

- **الرياضيات:** يتمثل دورها في صياغة النظرية الاقتصادية في شكل رياضي "معادلة أو مجموعة معادلات"، وتفيد في مرحلة لاحقة لبناء نموذج القياس الاقتصادي في البحث عن خصائص النموذج؛
- **الإحصاء:** يتم من خلاله توفير المعطيات الضرورية لعملية النمذجة، ويسمح بتبسيطها للاستعمال والتحليل.

تفيد نماذج القياس الاقتصادي في معرفة ورصد السلوك الماضي للمتغيرات ثم التنبؤ بسلوكها في المستقبل، كما تفيد أيضا في تحليل السياسة الاقتصادية للدولة واتخاذ القرار على المستويين الكلي والجزئي، فمثلا نماذج القياس الاقتصادي تساهم في تحضير مخططات وبرامج توقع حجم الطلب بالنسبة للمؤسسة الاقتصادية، حيث يضع تحت تصرف المسيرين حقائق كمية عن الوضع الحقيقي للمؤسسة وذلك لتفادي القرارات الخاطئة.

شكل (01): أنواع نماذج القياس الاقتصادي وأهدافها



يوضح الشكل أنواع نماذج القياس الاقتصادي والمتمثلة في:

1-1-النماذج الانحدارية

تشرح هذه المتغيرات متغير تابع بواسطة متغير أو مجموعة من المتغيرات المستقلة، ويمكن صياغتها في أبسط أشكالها كالتالي:

$$y_t = f(x_t)$$

النظرية الاقتصادية تعجز عن تحديد شكل الدالة وعدد معادلات النموذج، ويتم التخلص من هذا الإشكال بواسطة رسم بياني مزدوج بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

بافتراض أن العلاقة التي تربط بين المتغيرين علاقة خطية بسيطة، يتم صياغتها من الشكل:

$$y_t = \alpha + \beta x_t$$

حيث أن:

y: المتغير التابع؛

x: المتغير المستقل؛

α، β: معلمات النموذج

حيث يتحدد المتغير الأول بمعرفة المتغير الثاني، هدف هذه النماذج هو التنبؤ الذي يفيد في تحديد قيم المتغيرات ذات الأهمية بالنسبة لمتخذ القرار مستقبليا، كما تساعد على تحليل السياسة الاقتصادية من خلال قيام الجهة المعنية باتخاذ القرار، بعد تجريب سياستها المستهدفة عن طريق المحاكاة من خلال توجيه وتحديد المتغيرات القرارية قبل تنفيذها ميدانيا، ومنه تجنب الأضرار الجانبية غير المتوقعة.

1-2-نماذج السلاسل الزمنية

هذه النماذج عبارة عن معلومات رقمية خاصة بالظاهرة الاقتصادية المدروسة، تغطي السلسلة الزمنية فترة محددة من الزمن في شكل بيانات قابلة للمقارنة كالسنة، الفصل، الشهر، الأسبوع، اليوم، ونماذج السلاسل الزمنية تقوم بتفسير المتغير التابع بواسطة الزمن أو عبر السلوك الماضي لذلك المتغير.

يتم اعتماد السلاسل الزمنية في حالة تعذر تحديد محددات المتغير محل الدراسة والعوامل المؤثرة فيه، **مثلا:** إذا كان V_t تمثل حجم المبيعات لسلعة معينة، فإنه لا يمكن بالاعتما د على النظرية الاقتصادية معرفة أسباب التغيرات الحاصلة في حجم المبيعات بدقة، لأنه يمكن أن تكون هذه التقلبات استجابة لتغير الأسعار، الدخل المتاح، أو نتيجة لتأثير عوامل أخرى غير قابلة للقياس كالطقس، تغير الأذواق، عيد معين، إذا يمكن في هذه الحالة تفسير المبيعات اعتمادا:

- **الزمن:** من خلال مركبة الاتجاه العام $V_t = f(t, \varepsilon_t)$؛

- **السلوك الماضي للمتغير:** أي تفسير المتغير اعتمادا على سلوكه في الماضي

$V_t = f(V_{t-1}, V_{t-2}, ..., \varepsilon_t)$، حيث:

V_t, V_{T-1}: تمثل المبيعات في الفترة t والفترة التي قبلها $t-1$ حسب درجة التأخير المرغوبة والتي لا تحدد عشوائيا وإنما إحصائيا باستخدام اختبارات مناسبة؛

ε_t : الخطأ العشوائي المعبر عن التغيرات التي لا يمكن قياسها والأخطاء الواردة أثناء عملية جمع المعلومات.

ومن أهم أسبا اعتماد نماذج السلاسل الزمنية:

- غياب العلاقة السببية بين المتغيرات (التابع والمستقل) وصعوبة قياسها؛
- عدم توفر معطيات كافية حول المتغيرات المستقلة؛
- بساطة تركيب هذه النماذج وسهولة تفسير نتائجها بالنسبة للمسيرين.

1-تعريف السلسلة الزمنية

السلسلة الزمنية هي مجموعة من المشاهدات المسجلة لمتغير ما، مرتبة وفق حدوثها في الزمن، وتعطي قيم ظاهرة محددة:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n$$

فهي عبارة عن متغير مستمر عبر الزمن، ويكون الزمن t المتغير المستقل والظاهرة محل الدراسة المتغير التابع y، أي أن y تكون دالة تابعة في الزمن:

$$y_t = f(t, \varepsilon_t)$$

مثلا: السلاسل الزمنية الخاصة بالمؤشرات الاقتصادية، الدخل الوطني، الناتج المحلي الإجمالي، والمبيعات السنوية للشركات، رقم الأعمال، حجم السكان، عدد الطلبة، ...إلخ

مثال

يمكن عرض السلسلة الزمنية في جدول كما هو موضح في الجدول التالي الذي يمثل مؤشر حجم الصادرات في الجزائر من سنة 2005 إلى سنة 2019

الجدول (01): مؤشر حجم الصادرات في الجزائر 2005-2019" سنة الأساس:2000

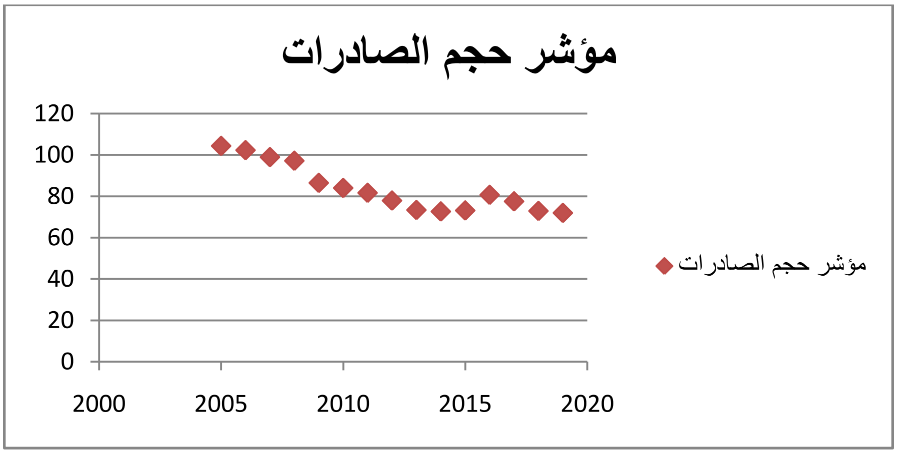
السنة	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	
م.ح.ص	104,31	102,25	98,90	97,13	86,46	84,00	81,66	
السنة	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
م.ح.ص	77,91	73,37	72,65	73,13	80,68	77,53	72,91	71,96

المصدر: البنك الدولي

https://data.albankaldawli.org/indicator/TX.QTY.MRCH.XD.WD?locations=DZ

كما يتم عرض السلسلة الزمنية في شكل تمثيل بياني:

الشكل (01): مؤشر حجم الصادرات في الجزائر 2005-2019" سنة الأساس:2000

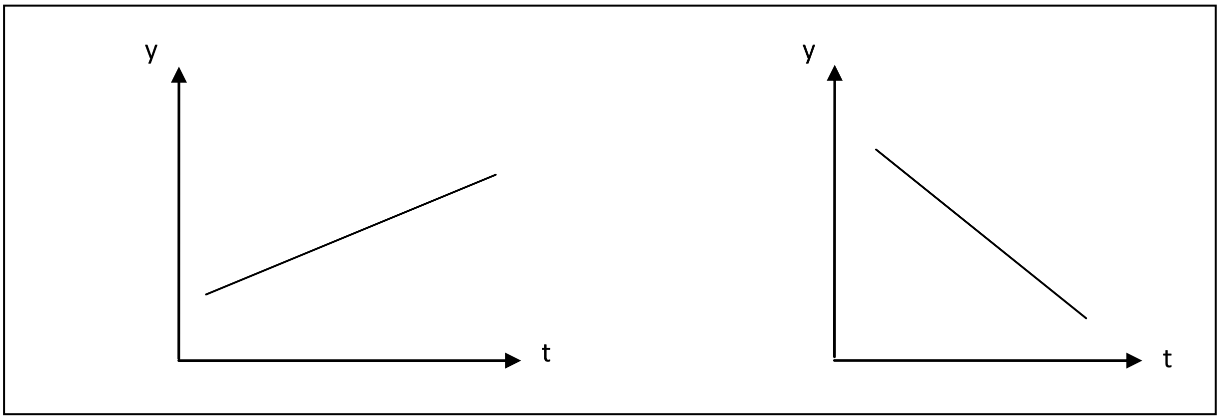


الشكل يوضح أن السلسلة لها ميل سالب، مما يدل على تناقص مؤشر حجم الصادرات في الجزائر على فترة الدراسة 2005-2019.

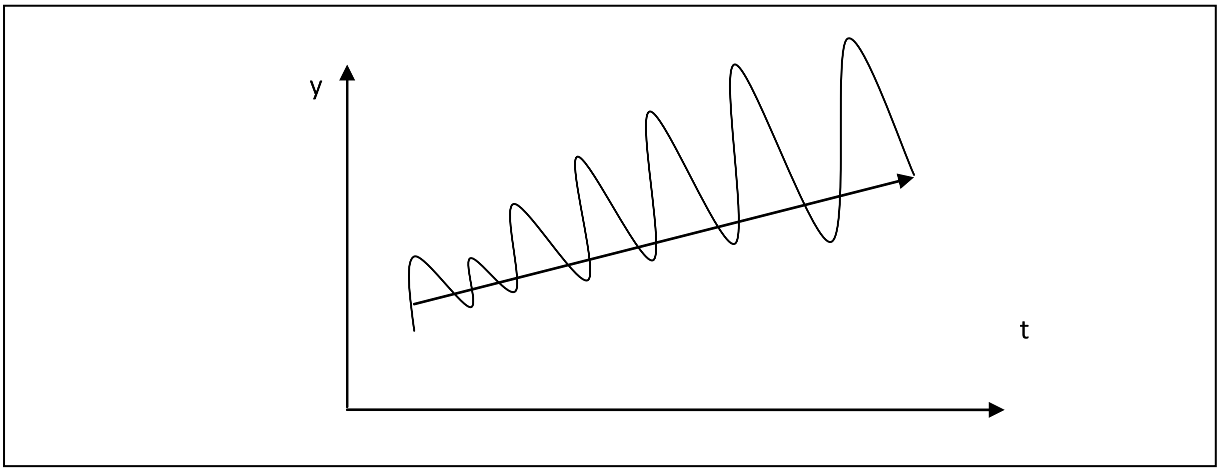
2-مكونات السلسلة الزمنية

يمكن تقسيم السلسلة الزمنية إلى أربعة عناصر تفيد في تحديد سلوكها في الماضي وأيضا في المستقبل، وتتمثل في:

2-1-مركبة الاتجاه العام T: تعبر عن التطور بميل موجب أو سالب لمتغير اقتصادي عبر الزمن، وهو أهم مركبة في السلسلة الزمنية.

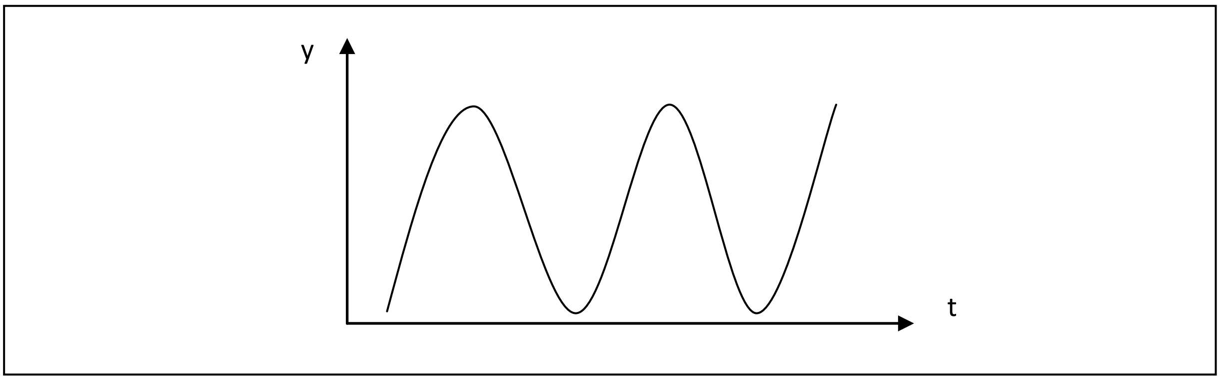


2-2-مركبة التغيرات الموسمية S: عبارة عن تأثيرات خارجية تطرأ على السلسلة الزمنية بطريقة منتظمة، وهي من أبسط المركبات من حيث التعامل معها وتحديد فترات وقوعها، وعملية التنبؤ في هذه الحالات تعتمد على حجم المؤشر الموسمي وليس على فترة الحدوث.

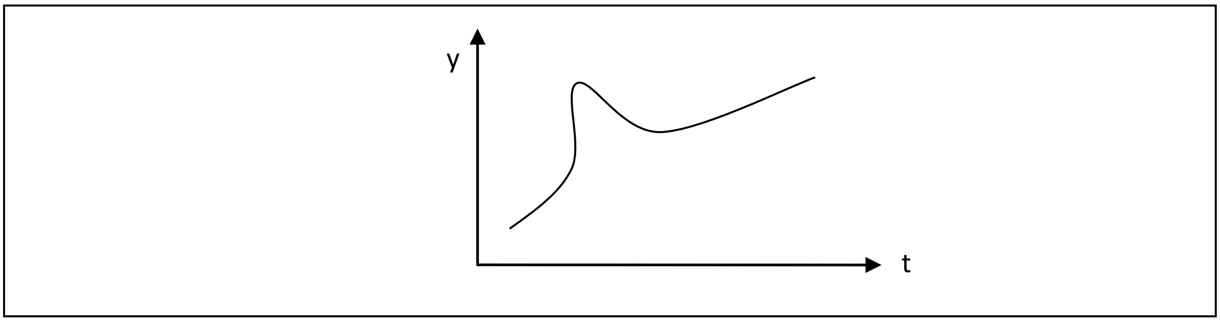


2-3-مركبة التغيرات الدورية C: تظهر هذه المركبة في السلاسل الزمنية طويلة الأجل، وهي تعكس تأثير العوامل الخارجية على السلسلة الزمنية بشكل منتظم، مثل فترات الانتعاش والركود في الاقتصاد، النمو

والانكماش، وقد تمتد طول الدورة الكاملة من 8 إلى 10 سنوات، وترجع لعوامل عدة، مثل سياسة الحكومة، العلاقات الدولية، ...، وتقاس طول الدورة بالفترة الزمنية بين مرحلتي ازدهار متتاليتين أو مرحلتي ركود متتاليتين.



2-4-مركبة التغيرات العشوائية R: تنشأ هذه التغيرات نتيجة العوامل التي لا يمكن التحكم فيها، كالكوارث الطبيعية، الإفلاس، الأزمات المالية العالمية، الحروب، ...، ولا يمكن التنبؤ بها لعدم انتظامها من جهة، والفترة الزمنية الصغيرة التي تحدث فيها من جهة أخرى.



3-العلاقة بين مركبات السلسلة الزمنية

يوجد نوعان من العلاقات التي تربط بين مركبات السلسلة الزمنية:

الحالة الجدائية: $y_t = T.C.S.R$

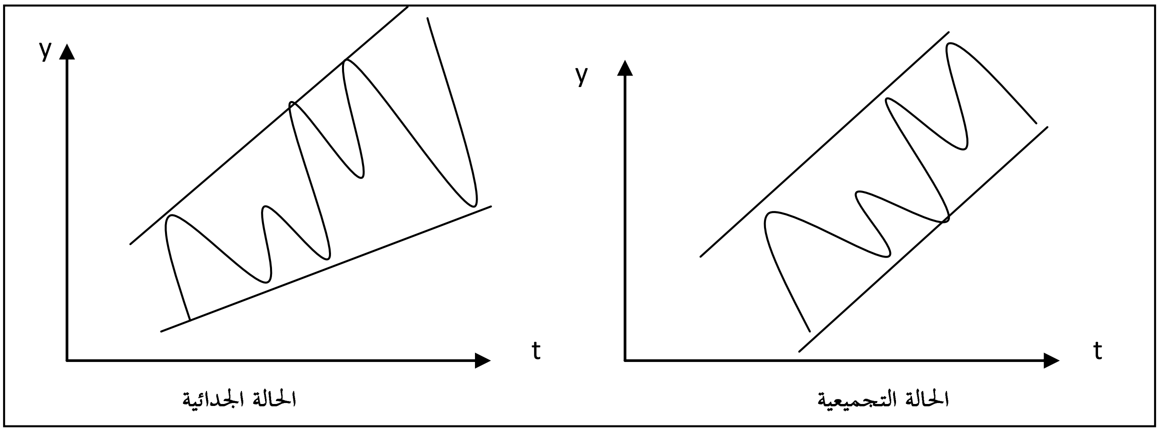
الحالة التجميعية: $y_t = T + C + S + R$

ولمعرفة أي حالة ترتبط بين المركبات يتم اعتماد أسلوبين:

3-1-الأسلوب البياني

حسب هذه الطريقة تكون السلسلة الزمنية ذات:

- **عناصر تجميعية:** في حالة كانت ذبذباتها تنحصر بين خطين متوازيين؛
- **عناصر جدائية:** عندما تكون ذبذبات السلسلة غير ثابتة الشدة (تباين متزايد)، وبالتالي تقع بين خطين منفرجين.



3-2-الأسلوب الانحداري

يتم عن طريق تقدير معلمة معامل الانحدار في المعادلة:

$$\sigma_i = a + b\bar{y}_i$$
$$i = 1,\dots,n$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{P} y_{ij}}{}$$

$$j = 1,\dots,p$$

i : السنوات؛

j : الفصول؛

$\bar{y}_i$: متوسط الفصول "المتوسط الحسابي لكل سنة"

ويتم تقدير المعلمة b بواسطة المربعات الصغرى:

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sum_{i=1}^{n}\sigma_i}{n\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\right)^2}$$

فإذا كان:

- $\hat{b} \prec 0{,}05$: السلسلة تجميعية
- $0{,}05 \le \hat{b} \le 0{,}10$: السلسلة مختلطة
- $\hat{b} \succ 0{,}10$: السلسلة جدائية

مثال

لدينا المعطيات التالية حول الاستهلاك الموسمي خلال الفترة 2017-2019

السنة	2017				2018				2019			
الفصل	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
الاستهلاك	155	158	163	171	153	156	162	172	162	164	173	181

المطلوب

- **تحديد العلاقة بين مركبات السلسلة الزمنية**

تقدير معامل الانحدار من المعادلة الخطية البسيطة:

$$\sigma_i = a + b\bar{y}_i$$

السنة \ الفصل	1	2	3	4	$\bar{y}_i$	σ_i	$\bar{y}_i.\sigma_i$	$\bar{y}_i^{\,2}$
2017	155	158	163	171	161,75	6,06	979,72	26163,06
2018	153	156	162	172	160,75	7,26	1166,82	25840,56
2019	162	164	173	181	170	7,58	1289,09	28900
$\sum$					492,5	20,9	3435,63	80903,62

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{P} y_{ij}}{p} = \frac{155+158+163+171}{4} = 161{,}75$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2} = \sqrt{\frac{\left[(155-161{,}75)^2 + (158-161{,}75)^2 + (163-161{,}75)^2 + (171-161{,}75)^2\right]}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{\left[45{,}5625 + 14{,}0625 + 1{,}5625 + 85{,}5625\right]}{4}} = \sqrt{\frac{146{,}75}{4}} = \sqrt{36{,}6875} = 6{,}057 \approx 6{,}06$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sum_{i=1}^{n}\sigma_i}{n\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\right)^2} = \frac{(3.3435{,}63)-(492{,}5.20{,}9)}{(3.80903{,}62)-(492{,}5)^2}$$

$$\hat{b} = 0{,}093$$

بما أن: $0{,}05 \leq \left(\hat{b} = 0{,}093\right) \leq 0{,}10$ فإن: السلسلة مختلطة.

تقديم

تهتم هذه النماذج بالمركبة النظامية في السلسلة الزمنية والمتمثلة في مركبة الاتجاه العام، وقد تكون ممثلة بدالة خطية، أسية، لوغاريتيمية،...

1-نموذج الاتجاه العام الخطي

يتم التعبير عن السلسلة الزمنية التي تنمو بمقدار مطلق ثابت عبر الزمن بالعلاقة التالية:

$$y_t = f(t, \varepsilon_t)$$

وعند التمثيل البياني لهذه العلاقة تظهر على الشكل الخطي الذي يعبر عنه رياضيا بـــ:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

يعكس المنحنى الممثل لهذه الدالة مركبة الاتجاه العام على السلسلة الزمنية، إضافة إلى المركبة العشوائية ضعيفة الذبذبة، مما يسهل عملية التنبؤ.

y_t : المتغير التابع "الظاهرة محل الدراسة"؛

ε_t : حد الخطأ العشوائي، ويمثل الفرق بين القيم الفعلية والقيم المقدرة:

$$\varepsilon_t = |y_t - \hat{y}_t|$$

β_0 : ثابت الانحدار، ويتم حسابه كما يلي:

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{t} = \frac{\sum y_t}{n} - \beta_1 \frac{\sum t}{n}$$

β_1 : معامل الانحدار، ويتم حسابه كما يلي:

$$\beta_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} y_t t - \sum y_t \sum t}{n\sum t^2 - \left(\sum t\right)^2}$$

أو

$$\beta_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t t - n.\bar{y}.\bar{t}}{\sum t^2 - \bar{t}^2}$$

t : المتغير المستقل "الزمن"، ويتم تقديره اعتمادا على الطريقة التالية:

$$M = \frac{n+1}{2}$$

$t = \vec{n} - M$ في حالة سلسلة فردية

$t = (\vec{n} - M) * 2$ في حالة سلسلة زوجية

$\vec{n}$: الترتيب التصاعدي

M : القيمة الوسطى

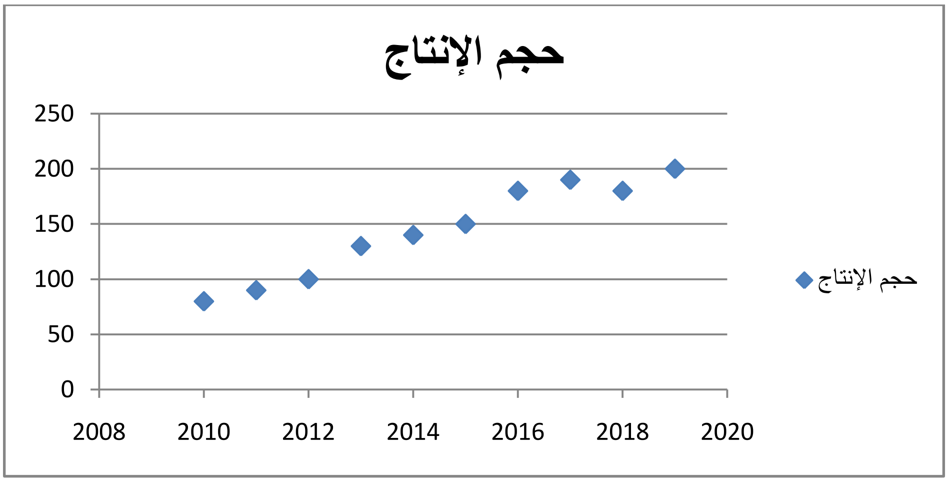
مثال

لدينا الجدول التالي يمثل حجم الإنتاج في إحدى المؤسسات:

السنة	y_t	t	$y_t.t$	t^2	$\hat{y}_t$	ε_t
2010	80	-9	-720	81	80,73	0.73
2011	90	-7	-630	49	94,79	4.79
2012	100	-5	-500	25	108,85	8.85
2013	130	-3	-390	9	122,91	7.09
2014	140	-1	-140	1	136.97	3.03
2015	150	1	150	1	151,03	14.91
2016	180	3	540	9	16.09	10.85
2017	190	5	950	25	179.15	13.21
2018	180	7	1260	49	193.21	7.27
2019	200	9	1800	81	207.27	
$\sum$	1440	0	2320	330		

المطلوب

1 - **التمثيل البياني**



من خلال التمثيل البياني تظهر النقط منتشرة حول خط مستقيم متزايد، وهذا يدل على أن العلاقة خطية طردية بين الإنتاج والزمن.

2 - **تحديد معادلة الاتجاه العام**

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M=\frac{n+1}{2}=\frac{10+1}{2}=5{,}5$$
$$t=(\vec{n}-M)*2=(1-5{,}5)*2=-9$$

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$\beta_1=\frac{n\sum_{t=1}^{n}y_t t-\sum y_t\sum t}{n\sum t^2-\left(\sum t\right)^2}=\frac{(10.2320)-(1440.0)}{(10.330)-0}=\frac{23200}{3300}=7{,}03$$
$$\beta_0=\bar{y}-\beta_1\bar{t}=\frac{\sum y_t}{n}-\beta_1\frac{\sum t}{n}=\frac{1440}{10}-7.03\frac{0}{10}=144$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t=144+7{,}03t$$

3 - حساب القيم الاتجاهية

نقوم بتعويض قيم t في معادلة الاتجاه العام المتحصل عليها $(\hat{y}_t=144+7{,}03t)$ ونضع القيم في الجدول:

$$\hat{y}_{2010}=144+(7{,}03.-9)=80{,}73$$

4 - حساب قيم حد الخطأ العشوائي

$$\varepsilon_t=|\hat{y}_t-y_t|=80{,}73-80=0{,}73$$

5 - التنبؤ بقيمة الإنتاج لسنة2020

$$\begin{cases}\hat{y}_t=144+7{,}03t\\ t=(\vec{n}-M)*2=(11-5{,}5)*2=11\end{cases}\Rightarrow \hat{y}_{2020}=144+(7{,}03.11)=221{,}33$$

ملاحظة هامة:

توجد مرحلة هامة بين عملية التقدير وعملية التنبؤ، وهي دراسة صلاحية النموذج ومدى قدرته على التنبؤ.

2-نموذج الاتجاه العام الأسي

يتم التعبير عن السلسلة الزمنية التي تنمو بنسبة مئوية ثابتة مقدارها r بالعلاقة التالية:

$$y_t=\alpha.e^{r.t+\varepsilon_T}$$

تتميز هذه العلاقة بأنها غير خطية، وحتى تسهل عملية التقدير اعتمادا على هذا النموذج، يتم تحويلها إلى علاقة خطية عن طريق اللوغاريتم، فتصبح كما يلي:

$$\ln(y_t)=\ln(\alpha)+r.t+\varepsilon_T$$

بتعويض رموز المعلمات $\ln(y_t)$ و$\ln(\alpha)$ بـــ z_t و β على التوالي تصبح المعادلة على الشكل:

$$z_t = \beta + r.t + \varepsilon_T$$

واعتمادا على طريقة المربعات الصغرى، يتم حساب المعلمات كما يلي:

$$\beta = \bar{z} - r\bar{t} = \frac{\sum z_t}{n} - r\frac{\sum t}{n}$$

$$r = \frac{n\sum z_t t - \sum z_t \sum t}{n\sum t^2 - \left(\sum t\right)^2}$$

أو

$$r = \frac{\sum z_t t - n.\bar{z}.\bar{t}}{\sum t^2 - \bar{t}^2}$$

ويتم التنبؤ بـــ في الفترة اللاحقة اعتمادا على العلاقة اللوغاريتمية:

$$\hat{z}_t = \hat{\beta} + \hat{r}.t$$

أو اعتمادا على العلاقة الأسية:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha}.e^{\hat{r}.t}$$

حيث أن:

$$\hat{y}_t = e^{\hat{z}_t}$$
$$\hat{\alpha} = e^{\hat{\beta}}$$

مثال

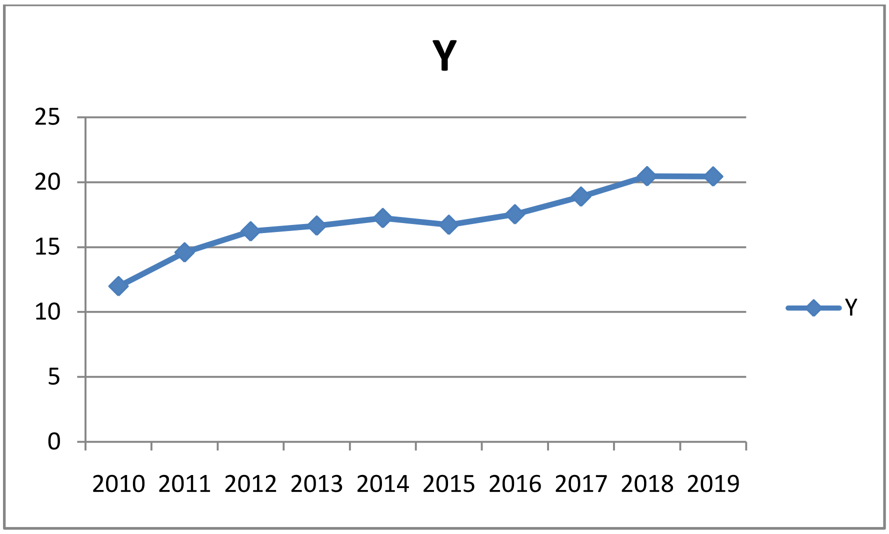
المعطيات التالية تمثل الناتج المحلي الإجمالي بالأسعار الجارية للعملة المحلية في الجزائر بالتريليون دينار جزائري من الفترة 2010 إلى 2019:

السنة	y_t	t	z_t	t^2	$t.z_t$
2010	11,99	-9	2,48	81	-22,36
2011	14,59	-7	2,68	49	-18,76
2012	16,21	-5	2,79	25	-13,93
2013	16,65	-3	2,81	9	-8,44
2014	17,23	-1	2,85	1	-2,85
2015	16,71	1	2,82	1	2,82
2016	17,52	3	2,86	9	8,59
2017	18,88	5	2,94	25	14,69
2018	20,45	7	3,02	49	21,13
2019	20,43	9	3,02	81	27,15

$\sum$		0	28,26	330	8,04

المطلوب

1 – التمثيل البياني



2 – تقدير دالة الاتجاه العام بافتراض أنها دالة أسية

$$y_t = \alpha . e^{r.t+\varepsilon_T}$$

$$\ln(y_t) = \ln(\alpha) + r.t + \varepsilon_T$$

$$z_t = \beta + r.t + \varepsilon_T$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5,5$$

$$t = (\vec{n} - M) * 2 = (1 - 5,5) * 2 = -9$$

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$r = \frac{n\sum z_t t - \sum z_t \sum t}{n\sum t^2 - \left(\sum t\right)^2} = \frac{(10.8,04) - (28,26.0)}{(10.330) - 0} = \frac{80,4}{3300} = 0,024$$

$$\beta = \bar{z} - r\bar{t} = \frac{\sum z_t}{n} - r\frac{\sum t}{n} = \frac{28,26}{10} - 0,024\frac{0}{10} = 2,826 \approx 2,83$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{z}_t = 2,83 + 0,024t$$

3 – التنبؤ بقيمة الناتج المحلي الإجمالي للسنوات2020–2022

$$\begin{cases} \hat{z}_{2020} = 2{,}83 + 0{,}024t \\ 2020 \Rightarrow t = (11 - 5{,}5) * 2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \hat{z}_{2020} = 2{,}83 + 0{,}024.11 = 3{,}098$$

$$\hat{y}_{2020} = e^{\hat{z}_{2020}} = e^{3{,}098} = 22{,}15$$

$$\begin{cases} \hat{z}_{2021} = 2{,}83 + 0{,}024t \\ 2021 \Rightarrow t = (12 - 5{,}5) * 2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \hat{z}_{2020} = 2{,}83 + 0{,}024.13 = 3{,}15$$

$$\hat{y}_{2021} = e^{\hat{z}_{2021}} = e^{3{,}15} = 23{,}26$$

$$\begin{cases} \hat{z}_{2022} = 2{,}83 + 0{,}024t \\ 2022 \Rightarrow t = (12 - 5{,}5) * 2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \hat{z}_{2022} = 2{,}83 + 0{,}024.15 = 3{,}19$$

$$\hat{y}_{2022} = e^{\hat{z}_{2022}} = e^{3{,}19} = 24{,}42$$

3-دالة القطع المكافئ

في بعض الأحيان يكون الشكل الخطي البسيك غير ملائم لتمثيل ظاهرة معينة، ويكون من الأفضل تمثيلها بكثير حدود من الدرجة الثانية الذي يمثل بالعلاقة التالية:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

ويتم استعمال طريقة المربعات الصغرى لتحديد معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد لقيم السلسلة الزمنية:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum t & \sum t^2 \\ \sum t & \sum t^2 & \sum t^3 \\ \sum t^2 & \sum t^3 & \sum t^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum t y_t \\ \sum t^2 y_t \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

تذكير بالمصفوفات

1 - **شرط ضرب مصفوفتان: عدد أعمدة المصفوفة الأولى=عدد أسطر المصفوفة الثانية**

سطر المصفوفة الأولى جداء عمود المصفوفة الثانية

2 - **معكوس المصفوفة:**

- **حساب المحدد $|D|$؛**
- **تحديد المدور $(X'X)'$ "قلب الأعمدة أسطر، والأسطر أعمدة"**
- **تحديد مصفوفة المرافقات $X'X^m$ مع احترام الإشارات $\pm$؛**
- **ضرب مصفوفة المرافقات في مقلوب المحدد$\frac{1}{|D|}$**

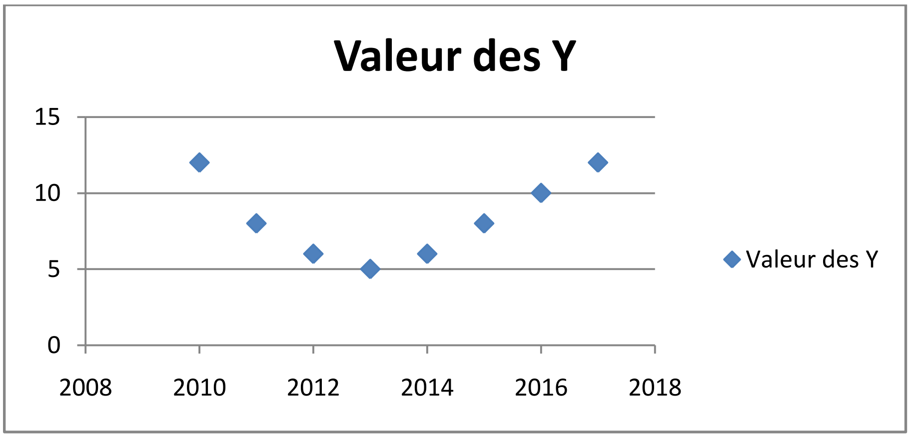
مثال

الجدول التالي يمثل قيمة المبيعات بمليون دينار لإحدى السلع المنتجة من طرف أحد المصانع سنويا:

السنة	y_t	t	$t.y_t$	t^2	t^3	t^4	$t.^2 y_t$
2010	12	-7	-84	49	-343	2401	588
2011	8	-5	-40	25	-)12	625	200
2012	6	-3	-18	9	-27	81	54
2013	5	-1	-5	1	-1	1	5
2014	6	1	6	1	1	1	6
2015	8	3	24	9	27	81	72
2016	10	5	50	25	125	625	250
2017	12	7	84	49	343	2401	588
$\sum$	67	0	17	168	0	6216	1763

المطلوب

1 – التمثيل البياني



2 – تقدير معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها دالة قطع مكافئ

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{8+1}{2} = 4{,}5$$

$$t = (\vec{n} - M) * 2 = (1 - 4{,}5) * 2 = -7$$

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum t & \sum t^2 \\ \sum t & \sum t^2 & \sum t^3 \\ \sum t^2 & \sum t^3 & \sum t^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum t y_t \\ \sum t^2 y_t \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0 & 168\\ 0 & 168 & 0\\ 168 & 0 & 6216\end{bmatrix}\begin{bmatrix}67\\ 17\\ 1763\end{bmatrix}$$

$$|D|=\begin{vmatrix}8 & 0 & 168\\ 0 & 168 & 0\\ 168 & 0 & 6216\end{vmatrix}\begin{vmatrix}10 & 0\\ 0 & 168\\ 168 & 0\end{vmatrix}$$

$$|D|=[(8.168.6216)+(0.0.168)+(168.0.0)]-[(0.0.6216)+(10.0.0)+(168.168.168)]$$

$$|D|=8354304-4741632=3612672$$

$$(X'X)'=\begin{bmatrix}8 & 0 & 168\\ 0 & 168 & 0\\ 168 & 0 & 6216\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^m=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}168 & 0\\ 0 & 6216\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 168 & 6216\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 168\\ 168 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 168\\ 0 & 6216\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}8 & 168\\ 168 & 6216\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}8 & 0\\ 168 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 168\\ 168 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}8 & 168\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}8 & 0\\ 0 & 168\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^m=\begin{bmatrix}1044288 & 0 & -28224\\ 0 & 21504 & 0\\ -28224 & 0 & 1344\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}1044288 & 0 & -28224\\ 0 & 21504 & 0\\ -28224 & 0 & 1344\end{bmatrix}.\frac{1}{3612672}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}29 & 0 & -0{,}008\\ 0 & 0{,}006 & 0\\ -0{,}008 & 0 & 0{,}0004\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}29 & 0 & -0{,}008\\ 0 & 0{,}006 & 0\\ -0{,}008 & 0 & 0{,}0004\end{bmatrix}\begin{bmatrix}67\\ 17\\ 1763\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(0{,}29.67)+(0.17)+(-0{,}008.1763)\\ (0.67)+(0{,}006.17)+(0.1763)\\ (-0{,}008.67)+(0.17)+(0{,}0004.1763)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5{,}32\\ 0{,}102\\ 0{,}17\end{bmatrix}$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t=3{,}245+0{,}102t+0{,}370t^2$$

3 - التنبؤ بالإنتاج للسنوات 2018-2021

$$2018 = (\vec{n} - M) * 2 = (9 - 4{,}5) * 2 = 9$$

$$\hat{y}_{2018} = 3{,}245 + (0{,}102.9) + (0{,}370.9^2) = 34{,}133$$

$$2019 = (\vec{n} - M) * 2 = (10 - 4{,}5) * 2 = 11$$

$$\hat{y}_{2019} = 3{,}245 + (0{,}102.11) + (0{,}370.11^2) = 49{,}14$$

$$2020 = (\vec{n} - M) * 2 = (11 - 4{,}5) * 2 = 13$$

$$\hat{y}_{2020} = 3{,}245 + (0{,}102.13) + (0{,}370.13^2) = 67{,}10$$

$$2021 = (\vec{n} - M) * 2 = (12 - 4{,}5) * 2 = 15$$

$$\hat{y}_{2021} = 3{,}245 + (0{,}102.15) + (0{,}370.15^2) = 88{,}025$$

تقديم

التمهيد يعني تهذيب السلسلة من خلال إزالة الذبذبات الحادة والعشوائية عنها، لتسهيل عملية التحليل، ومن أهم طرق التمهيد، طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة، وطريقة التمهيد الأسي البسيطة

1-طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة

طريقة المتوسطات المتحركة تستخدم عندما يغلب الطابع العشوائي على بيانات السلسلة، وتكون البيانات تتأرجح بشكل غير نمطي حول متوسط ثابت يمثل مستوى السلسلة الزمنية على طول فترة الدراسة، وتستخدم k مشاهدة من قيم السلسلة للتنبؤ بالقيمة التالية، وذلك بحساب متوسط هذه القيم:

$$\hat{y}_t = \frac{1}{k}\left(y_{t-1} + y_{t-2} + \ldots + y_{t-k}\right)$$

ولحساب المتوسط المتحرك البسيط اللاحق، نستخدم نفس القيم التي استخدمت في حساب المتوسط السابق له مباشرة، بإحلال القيمة الأحدث مكان القيمة الأقدم، ومعنى التحرك أن المتوسط يتم تحديثه دائما عن طريق حذف مشاهدة أقدم وتعويضها بالمشاهدة التالية:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{1}{k}\left(y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-k-1}\right)$$

اختيار طول الدورة k يكون حسب المعطيات (4 في المعطيات الفصلية، 5 في المعطيات الأسبوعية، 3 في المعطيات السداسية، 6 في المعطيات الثلاثية، ويكون اختياريا في الحالات الأخرى).

مثال

الجدول التالي يوضح قيمة المبيعات السنوية من إحدى السلع بمليون دينار جزائري من سنة 2011-2019

السنة	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
المبيعات	9	11	10	12	11	9	13	11	9

المطلوب

1 - التنبؤ بمبيعات سنة 2020 اعتمادا على طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة باستخدام $k=2$، و $k=3$

السنة	y_t	$k=2\ \ \hat{y}_t$	$\varepsilon^2\ k=2$	$k=3\ \ \hat{y}_t$	$\varepsilon^2\ k=3$
2011	9				
2012	11				
2013	10	10	0		

2014	12	10,5	2,25	10	4
2015	11	11	0	11	0
2016	9	11,5	6,25	11	4
2017	13	10	9	10,67	5,4289
2018	11	11	0	11	0
2019	9	12	9	11	4
2020		10	$\sum \varepsilon^2 = 26{,}5$	11	$\sum \varepsilon^2 = 17{,}43$

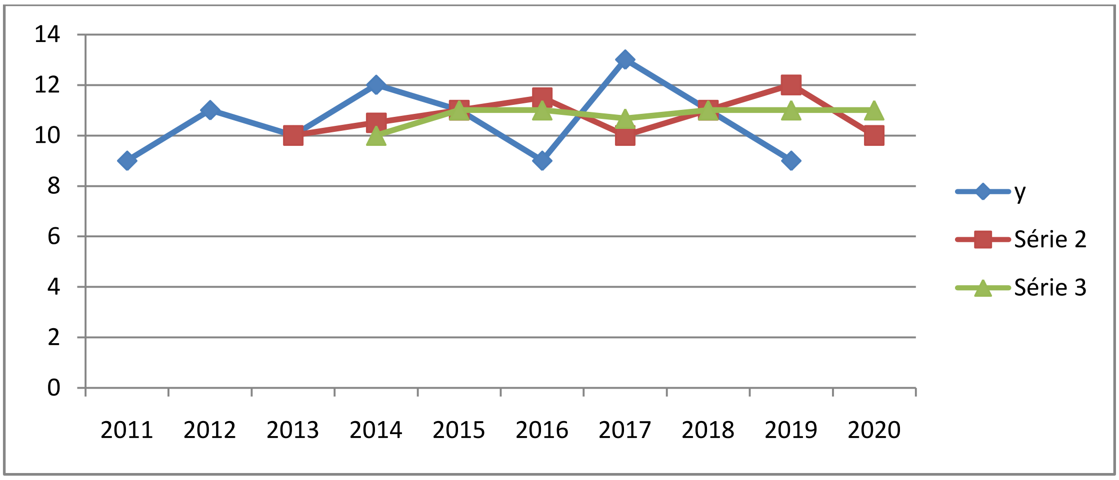
2 – أي التنبؤات أفضل ولماذا؟

عند $k = 2$: $\sum \varepsilon^2 = 26{,}5$

وعند $k = 3$: $\sum \varepsilon^2 = 17{,}43$

وبالتالي التنبؤات اعتمادا على المتوسط الحسابي لثلاث مشاهدات أفضل لأنها تدني مجموع مربعات الأخطاء العشوائية.

3 – التمثيل البياني للسلسلة الزمنية



2–طريقة المتوسطات المتحركة المرجحة

يختلف المتوسط المتحرك المرجح عن المتوسط المتحرك البسيط، كونه يعطي وزن ترجيحي أكبر لأحدث مشاهدة، وأوزان ترجيحية متناقصة للمشاهدات الأقدم، أي أن القيمة المقدرة تتأثر بسلوك أحدث مشاهدة، عكس المتوسط المتحرك البسيط الذي يعتبر كل المشاهدات بنفس الوزن والأهمية، ويحسب المتوسط المتحرك المرجح بالعلاقة التالية:

$$\hat{y}_t = \frac{\sum_{n=1}^{k} w_n y_{t-n}}{\sum_{n=1}^{k} w_n}$$

$\sum_{n=1}^{k} w_n$: مجموع الأوزان الترجيحية ومجموعها يعادل 100% أي 1صحيح، أي أن العلاقة تعادل:

$$\hat{y}_t = \sum_{n=1}^{k} w_n y_{t-n}$$

مثال

البيانات التالية تمثل كمية الطلب بالآلاف وحدة على أحد المنتجات لشركة معينة خلال أشهر السنة 2020:

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الطلب	25	30	32	40	48	58	65	75	70	45	40	35

المطلوب

- **القيام بعملية التنبؤ بالطلب للفترة اللاحقة باستخدام متوسط متحرك طوله4 أشهر بإعطاء أوزان ترجيحية بــ 0,4 قبل شهر، 0,3 قبل شهرين، 0,2 قبل ثلاثة أشهر، 0,1 قبل أربعة أشهر**
- **القيام بعملية التنبؤ بالطلب للفترة اللاحقة باستخدام متوسط متحرك طوله3 أشهر بإعطاء أوزان ترجيحية بــ 0,5 قبل شهر، 0,33 قبل شهرين، 0,17 قبل ثلاثة أشهر، 0,1 قبل أربعة أشهر**

$$\hat{y}_t = \frac{(0{,}4*40)+(0{,}3*32)+(0{,}2*30)+(0{,}1*25)}{1} = 16+9.6+6+2.5 = 34.1$$

الشهر	y_t	$\hat{y}_t\ k=4$	ε_t^2	$\hat{y}_t\ k=3$	ε_t^2
1	25				
2	30				
3	32				
4	40			30,15	97,02
5	48	34,1	193,21	35,66	152,28
6	58	40, 6	302,76	42,64	235,93
7	65	48,8	262 ,44	51,64	178,49
8	75	57	324	59,8	2231,04
9	70	65,9	16,81	68,81	1,42
10	45	69,3	590,49	70,8	665,64
11	40	60,5	420,25	58,35	336,72
12	35	51	256	46,75	138,06

		42	$\varepsilon_t^{\,2} = 2365{,}96$	38,35	$\varepsilon_t^{\,2} = 2036{,}60$

– أفضل التنبؤات هي التنبؤات اعتمادا على طول الدورة 3 أشهر لأنها تعطي أقل قيمة لمربعات البواقي

3–طريقة التمهيد الأسي البسيطة

تستعمل هذه الطريقة إذا كانت بيانات السلسلة الزمنية تتأرجح حول متوسط حسابي يتغير ببطء على فترة الدراسة، وفي هذه الحالة يتم إعطاء وزن أكبر لأحدث مشاهدة عند التنبؤ وأوزان متناقصة مع زيادة الفاصل الزمني بين زمن المشاهدة والزمن المتنبأ عنده، وتعتمد فكرة التنبؤ الأسي على إعطاء وزن ترجيح كبير لأحدث مشاهدة w عند الزمن المتنبأ عنده، وإعطاء أوزان ترجيحية تتناقص بشكل أسي مع زيادة الفاصل الزمني بين زمن التنبؤ وزمن المشاهدات السابقة، ويكتب النموذج وفق العلاقة التالية:

$$\tilde{y}_t = wy_{t-1} + w(1-w)y_{t-2} + w(1-w)^2 y_{t-3} + \ldots + w(1-w)^n y_{t-n}$$

لتبسيط هذه العلاقة يتم:

– تأخير المعادلة بفترة زمنية واحدة وضربها في المقدار $(w-1)$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{y}_{t-1} = wy_{t-2} + w(1-w)y_{t-3} + \ldots + w(1-w)^{n-1} y_{t-n} \\
&\left(\tilde{y}_{t-1} = wy_{t-2} + w(1-w)y_{t-3} + \ldots + w(1-w)^{n-1} y_{t-n}\right) * (1-w) \\
&(1-w)\tilde{y}_{t-1} = w(1-w)y_{t-2} + w(1-w)^2 y_{t-3} + \ldots + w(1-w)^n y_{t-n}
\end{aligned}$$

– طرح المعادلة الأخيرة 2 من المعادلة الأصلية 1:

$$\begin{aligned}
&\left[\tilde{y}_t = wy_{t-1} + w(1-w)y_{t-2} + w(1-w)^2 y_{t-3} + \ldots + w(1-w)^n y_{t-n}\right] - \\
&\left[(1-w)\tilde{y}_{t-1} = w(1-w)y_{t-2} + w(1-w)^2 y_{t-3} + \ldots + w(1-w)^{n+1} y_{t-n}\right] \Rightarrow \\
&\tilde{y}_t - (1-w)\tilde{y}_{t-1} = wy_{t-1}
\end{aligned}$$

– إعادة الترتيب للحصول على العلاقة النهاية:

$$\tilde{y}_t = wy_{t-1} + (1-w)\tilde{y}_{t-1}$$

تطبيق هذه الطريقة تحتاج إلى قيمة الانطلاق لبدء عملية التمهيد، ومن أهم طرق تحديدها:

– استخدام الوسط الحسابي لقيم السلسلة كتقدير لقيمة الانطلاق؛

– استخدام المشاهدة الأولى كقيمة للانطلاق؛

– استخدام الوسط الحسابي لبعض المشاهدات الأولى لتقدير قيمة الانطلاق.

مثال

البيانات التالية تمثل عدد الأجهزة المباعة بالآلاف التي سجلت شهريا في دفاتر إحدى المؤسسات

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ع.أ.م	14	16	18	14	15	14	15	13	14	12	12	11

المطلوب

1 - تقدير القيم الابتدائية باستخدام الوسط الحسابي لقيم السلسلة الزمنية كقيمة للانطلاق

الشهر	y_t	$\tilde{y}_t$ $w=0,7$	$\tilde{y}_t$ $w=0,9$	$\varepsilon^2 \quad w=0,7$	$\varepsilon^2 \quad w=0,9$
1	14	$\hat{y}_1=14$	$\hat{y}_1=14$		
2	16	14	14	4,00	4,00
3	18	15,4	15,80	6,76	4,84
4	14	17,22	17,78	10,37	14,29
5	15	14,97	14,38	0,00	0,39
6	14	14,99	14,94	0,98	0,88
7	15	14,30	14,09	0,49	0,82
8	13	14,79	14,91	3,20	3,65
9	14	13,54	13,19	0,21	0,65
10	12	13,86	13,92	3,46	3,68
11	12	12,5	12,19	0,31	0,04
12	11	12,17	12,02	1,36	1,04
		11,35	11,10		
	$\bar{y}=14$			$\sum\varepsilon^2=31,16$	$\sum\varepsilon^2=34,27$

2 - التنبؤ بقيم الفترة اللاحقة باستخدام معامل التناقص $w=0,7$ **و** $w=0,9$

$$\tilde{y}_t = wy_t + (1-w)\hat{y}_{t-1}$$
$$\tilde{y}_0 = \bar{y} = 14$$
$$\tilde{y}_1 = wy_1 + (1-w)\tilde{y}_0$$
$$\tilde{y}_2 = (0,7*14) + ((1-0,7)*14) = 14$$
$$\tilde{y}_3 = (0,7*16) + ((1-0,7)*14) = 15,40$$

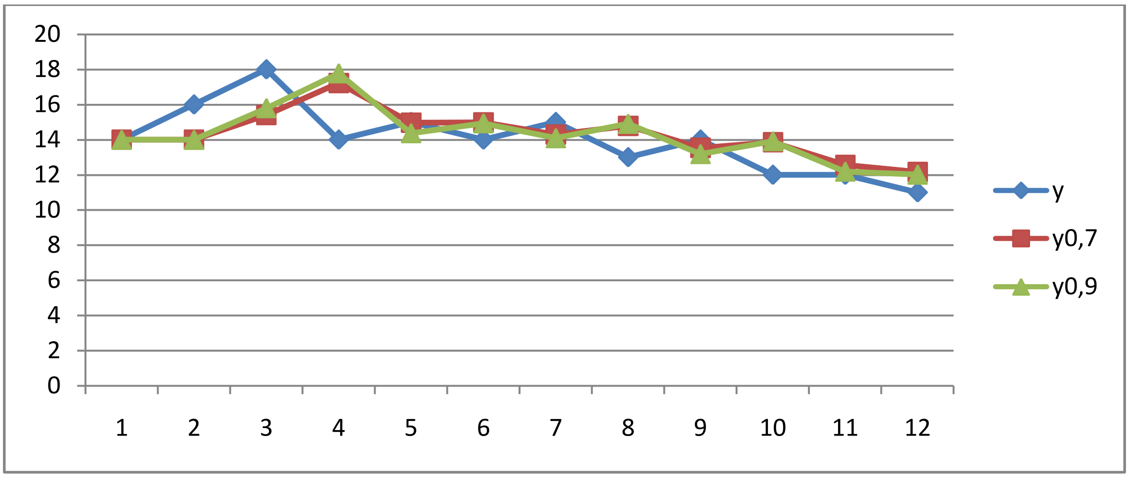
3 - أي التنبؤات أفضل ولماذا؟

عند $w=0,7$: $\sum\varepsilon^2 = 31,16$

وعند $w=0,9$: $\sum\varepsilon^2 = 34,27$

وبالتالي التنبؤات اعتمادا على معامل التناقص $w = 0,7$ أفضل لأنها تدني مجموع الأخطاء العشوائية.

4 – التمثيل البياني للسلسلة الزمنية الأصلية والممهدة



3-طريقة التمهيد الأسي المزدوج

يتم استعمال التمهيد الأسي المزدوج إذا كانت السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة الاتجاه العام بالإضافة إلى المركبة العشوائية، ويتم التعبير عنها رياضيا بالعلاقة الانحدارية التالية:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + e_t$$
$$y_t = T + R$$

$\beta_0 + \beta_1 t$: مركبة الاتجاه العام؛

e_t : المركبة العشوائية

ويتم تمهيد السلسلة الزمنية على مرحلتين متتاليتين:

المرحلة الأولى: تمهيد السلسلة للمرة الأولى

$$\tilde{y}_t = w y_t + (1-w)\tilde{y}_{t-1}$$

المرحلة الثانية: تمهيد السلسلة للمرة الثانية

$$\tilde{\tilde{y}}_t = w\tilde{y}_t + (1-w)\tilde{\tilde{y}}_{t-1}$$

ويتم حساب المعلمتين كما يلي:

$$\beta_0 = 2\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t$$
$$\beta_1 = \frac{w}{w-1}\left(\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t\right)$$

مثال

لدينا السلسلة الزمنية التالية التي تعبر عن قيم ظاهرة معينة خلال الفترة 2009-2020

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
y	23	27	33	35	40	42	45	50	52	55	52	55

المطلوب:

– تمهيد السلسلة الزمنية باستعمال التمهيد الأسي المزدوج

أولا: تمهيد السلسلة الزمنية على المرحلة الأولى؛

ثانيا: تمهيد السلسلة الزمنية على المرحلة الثانية

السنة	t	y_t	$\tilde{y}_t$	$\tilde{\tilde{y}}_t$	β_0	β_1
2009	-11	23	23	23	–	–
2010	-9	27	23	23	–	–
2011	-7	33	24,20	23	25,40	3,60
2012	-5	35	26,84	23,36	30,32	10,44
2013	-3	40	29,29	24,40	34,17	14,65
2014	-1	42	32,50	25,87	39,13	19,90
2015	1	45	35,35	27,86	42,84	22,48
2016	3	50	38,25	30,11	46,38	24,42
2017	5	52	41,77	32,55	51,00	27,67
2018	7	55	44,84	35,32	54,37	28,57
2019	9	52	47,89	38,17	57,60	29,15
2020	11	55	49,12	41,09	57,16	24,10
2021			50,89	43,50	58,27	22,16

مثال

تمثل البيانات التالية المبيعات اليومية لأحد المتاجر خلال شهر:

اليوم / الأسبوع	1	2	3	4
السبت	360	350	380	390
الأحد	400	430	440	450
الاثنين	480	490	490	500
الثلاثاء	600	580	590	600
الأربعاء	660	680	690	690

المطلوب:

1. **حساب القيم الاتجاهية باعتماد متوسط متحرك لخمسة أيام**

2. دراسة طبيعة العلاقة بين مركبات السلسلة
3. حساب المبيعات المصححة موسميا
4. حساب التغير العشوائي
5. التمثيل البياني للمبيعات الفعلية والمبيعات المصححة موسميا في معلم واحد