المحور الأول: نظرية توزيع المعاينة

تهتم نظرية العينات بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه، كما يسمى **الإحصاء الاستدلالي**، والإحصاء الاستدلالي يعتبر أحد أكبر جوانب عملية اتخاذ القرار أهمية وحيوية في الاقتصاد والأعمال.

ويتعلق الاستدلال الإحصائي بالتقدير واختبار الفرضيات أيضا "في المحاور اللاحقة"، و **التقدير** هو عملية حساب أحد معالم المجتمع "المتوسط الحسابي، التباين، الانحراف المعياري" من القيم المحسوبة المناظرة والخاصة بعينة مسحوبة من هذا المجتمع، ولكي يكون التقدير صحيحا ينبغي أن يبنى على عينة ممثلة للمجتمع تمثيلا سليما.

ويمكن تحقيق ذلك **بالمعاينة**، فمثلا نستعين بعينة مسحوبة من المجتمع لتقدير معالم هذا المجتمع مثل المتوسط الحسابي أو الانحراف المعياري، أو إعطاء عينة من المرضى بمرض ارتفاع ضغط الدم دواء معين، مع قياس مستوى ضغطهم قبل وبعد تناولهم الدواء لمعرفة ما إذا كان هذا الدواء مفيد في خفض ضغط الذم أم لا.

1-تعريف المجتمع الإحصائي

هو مجموعة المفردات أو الوحدات التي نريد الاستدلال على خواصه عن طريق عينة مسحوبة منه، فهو كل مجموعة من المفردات التي تشترك في صفة أو مجموعة من الصفات تكون موضوع دراسة أو بحث ما.

يمكن تقسيم المجتمعات إلى **مجتمعات ثابتة** لا تخضع لتغيرات خلال فترة قصيرة مثل الزمن، كالمدن والشوارع، **ومجتمعات حركية "غير ثابتة"** تتغير بشكل سريع من فترة إلى أخرى معدد السكان، عدد السيارات التي تمر بشارع ما،...

يجب تحديد المجتمع الذي سيشمله البحث تحديدا واضحا ودقيقا لتقييم نتائج العينة بشكل دقيق، خاصة فيما يتعلق بعدد وحدات المجتمع، حيث يمكن التمييز بين **المجتمع المحدود** وهو الذي يمكن حساب أعداد أفراده كما في حالة عدد الطلبة، عدد المقيمين وغير المقيمين من الطلبة، كما يوجد **المجتمع غير المحدود** وهو الذي لا يمكن تحديد عدد أفراده، أو يكون حجمه كبير جدا، ونرمز للمجتمع الإحصائي بالرمز N.

2-تعريف العينة

تستخدم كلمة عينة بشكل كبير في الحياة اليومية، إذ أنه عندما يمرض الشخص يطلب منه فحص عينة من الدم، كذلك عند شراء سلعة معينة بكميات كبيرة تطلب عينة من هذه السلعة للتأكد من جودتها قبل اتخاذ القرار بشرائها.

عملية الاختيار قد تكون جيدة ومناسبة بحيث يمكن التوصل إلى قرارات سليمة، وقد تكون خاطئة وبالتالي تؤدي على الوصول إلى نتائج مضللة، وعليه **العينة** هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها لتمثيل المجتمع، ويرمز لحجم العينة بالرمز n.

3–تعريف المعاينة

هي عملية اختيار جزء من المجتمع الإحصائي للاستدلال على خواص معالم المجتمع بأكمله عن طريق تعميم نتائج العينة،مثلا: نفرض أنه يراد دراسة مستوى الرضا الوظيفي في إحدى المؤسسات، ونظرا لكبر عدد الموظفين تقرر اختيار عدد منهم لتمثيل كل موظفي المؤسسة، الموظفون الذين تم اختيارهم يمثلون العينة، والموظفون في المؤسسة يمثلون **المجتمع الإحصائي**، أما عملية اختيار هذه **العينة** وتعميم النتائج للاستدلال على خصائص المجتمع تسمى **المعاينة**.

- المقياس الإحصائي المحسوب من العينة يسمى **التابع الإحصائي أو الإحصاءة** ، سواء كان متوسط حسابي أو تباين أو انحراف معياري؛
- نفس المقياس يسمى **ثابت إحصائي أو معلمة** إذا كان محسوبا بدلالة المجتمع الإحصائي

الجدول 01: ترميز معالم المجتمع وإحصاءات العينة

	معالم المجتمع	إحصاءات العينة
المتوسط الحسابي	μ	$\bar{x}$
التباين	σ^2	δ^2
الحجم	N	N

مثال:

نفرض أننا سحبنا عينة حجمها n_1 من مجتمع ما، وحسبنا من هذه العينة مقياسا معينا وليكن الانحراف المعياري، ثم سحبنا عينة ثانية من نفس المجتمع وبنفس الحجم n_2، ثم سحبنا عينة ثالثة ورابعة وهكذا بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع: سنجد أمامنا عدد من القيم لنفس المقياس، أي أننا سنجد أمامنا عدد من الانحرافات المعيارية بعدد العينات المسحوبة من المجتمع، ولن تكون جميع هذه القيم لهذا التابع الإحصائي متساوية، وإنما تكون مختلفة عن بعضها البعض وتكوّن توزيع احتمالي يدعى **توزيع المعاينة**.

4–توزيع المعاينة

هو التوزيع التكراري لأحد التوابع الإحصائية المحسوب في العينات العشوائية ذات الحجم الواحد، والتي يمكن سحبها من مجتمع إحصائي واحد.

5–أنواع المعاينة

يوجد نوعين من المعاينة:

- **المعاينة بالإرجاع "معاينة غير نفاذية"– مجتمع غير محدود:** في هذه الحالة يمكن أن تظهر المفردة أكثر من مرة في العينة، وتكرار عملية السحب لا يؤدي إلى تقليص عدد مفردات المجتمع، وفي هذه الحالة عدد العينات الممكنة تساوي:

$$A = N^n$$

- **المعاينة بدون إرجاع "عينة نفاذية"– مجتمع محدود:** في هذه الحالة لا يمكن أن تظهر المفردة أكثر من مرة في العينة، وتكرار عملية السحب يؤدي إلى تقليص عدد المفردات في المجتمع، وفي هذه الحالة عدد العينات الممكنة والمسحوبة من المجتمع تحسب بطريقتين:
  - حالة السحب بدون إرجاع والترتيب غير مهم "توفيقة"

$$C_N^n = \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

  - حالة السحب بدون إرجاع والترتيب مهم "ترتيبة"

$$P_n^1 = \frac{N!}{(N-n)!}$$

ملاحظة: في حالة السحب بدون إرجاع ولم يتم ذكر نوعية الترتيب، يتم اعتبار أن الترتيب غير مهم.

I-متغير توزيع المعاينة من أجل المعدلات "المتوسطات"

ليكن μ المعدل "المتوسط الحسابي" الخاص بمجتمع إحصائي معين:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

و σ الإنحراف المعياري الخاص بالمجتمع الاحصائي:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$$

نأخذ من المجتمع الإحصائي عينات ذات الحجم n:

$$n = n_1 = n_2 = n_3 = ... = n_k$$

أوساطها الحسابية كالتالي:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, ..., \bar{x}_k$$

العينة 1:

$$x_1^1, x_2^1, x_3^1, ..., x_n^1$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^1}{n_1}$$

العينة 2:

$$x_1^2, x_2^2, x_3^2, ..., x_n^2$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n_2}$$

العينة k:

$$x_1^k, x_2^k, x_3^k, ..., x_n^k$$

$$\bar{x}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n_k}$$

نسمي $\bar{x}$ متغير توزيع المعاينة من أجل المعدلات حيث:

$\tau_{\bar{x}}$: هو معدل "المتوسط الحسابي" لمتغير توزيع المعاينة للمعدلات "المتوسطات"، يحسب بالطريقة التالية:

$$\tau_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i}{k}$$

$\sigma_{\bar{x}}$: هو الانحراف المعياري لمتغير توزيع المعاينة للمعدلات "المتوسطات"، ويحسب بالطريقة التالية:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{x}_i - \tau_{\bar{x}}\right)^2}{k}}$$

ملاحظات:

- المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة للمعدلات $\tau_{\bar{x}}$ يساوي دائما المتوسط الحسابي للمجتمع μ

$$\tau_{\bar{x}} = \mu$$

مهما كان نوع السحب؛

- الانحراف المعياري لمتغير توزيع المعاينة للمعدلات يحسب:

في حالة السحب بالإرجاع

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

في حالة السحب دون إرجاع

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

- يسمى المعامل $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ بمعامل الإرجاع، ويستعمل في حالة السحب دون إرجاع

مثال

ليكن لدينا المجتمع الإحصائي التالي: 2,3,4,5

1 - أحسب معالم المجتمع الإحصائي؛

2 - في حالة السحب بدون إرجاع أحسب:

- عدد العينات الممكن تكزينها بحجم n=2؛
- المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة للمتوسطات؛
- الانحراف المعياري لمتغير توزيع المعاينة للمتوسطات.

3 - في حالة السحب بالإرجاع أحسب: نفس الأسئلة

الحل

1 - حساب معالم المجتمع

- المتوسط الحسابي

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{2+3+4+5}{4} = 3,5$$

– التباين

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{(2-3,5)^2 + (3-3,5)^2 + (4-3,5)^2 + (5-3,5)^2}{4} =$$
$$\frac{2,25 + 0,25 + 0,25 + 2,25}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$$

– الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{1,25} = 1,118 \approx 1,12$$

2 – في حالة السحب بدون إرجاع، حساب:

– عدد العينات الممكن تكوينها

$$C_N^n = \frac{N}{(N-n)!\,n!} = \frac{4}{(4-2)!\,2!} = \frac{24}{2*2} = \frac{24}{4} = 6$$

– المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة للمتوسطات بطريقتين

الطريقة الأولى:

$$\tau_{\bar{x}} = \mu = 3,5$$

الطريقة الثانية:

المتوسط الحسابي لكل عينة $\bar{x}$	العينات
$\bar{x} = \frac{2+3}{2} = 2,5$	$(2,3)$
$\bar{x} = \frac{2+4}{2} = 3$	$(2,4)$
$\bar{x} = \frac{2+5}{2} = 3,5$	$(2,5)$
$\bar{x} = \frac{3+4}{2} = 3,5$	$(3,4)$
$\bar{x} = \frac{3+5}{2} = 4$	$(3,5)$
$\bar{x} = \frac{4+5}{2} = 4,5$	$(4,5)$
21	$\sum$

$$\tau_{\bar{x}} = \frac{21}{6} = 3,5$$

–الانحراف المعياري لمتغير توزيع المعاينة للمتوسطات بطريقتين

الطريقة الأولى

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{1{,}12}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4-2}{4-1}} = 0{,}79 * 0{,}81 = 0{,}64$$

الطريقة الثانية

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{x}_i - \tau_{\bar{x}}\right)^2}{k}} = \sqrt{\frac{(2{,}5-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(3{,}5-3{,}5)^2+(3{,}5-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(4{,}5-3{,}5)^2}{6}} =$$

$$\sqrt{\frac{1+0{,}25+0+0+0{,}25+1}{6}} = \sqrt{\frac{2{,}5}{6}} = 0{,}64$$

3 – في حالة السحب بالإرجاع، حساب:

4 – عدد العينات الممكن تكوينها

$$k = N^n = 4^2 = 16$$

5 – المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة للمتوسطات بطريقتين

الطريقة الأولى:

$$\tau_{\bar{x}} = \mu = 3{,}5$$

الطريقة الثانية:

العينة	$\bar{x}$	العينة	$\bar{x}$	العينة	$\bar{x}$	العينة	$\bar{x}$
$(2,2)$	2	$(3,2)$	2,5	$(4,2)$	3	$(5,2)$	3,5
$(2,3)$	2,5	$(3,3)$	3	$(4,3)$	3,5	$(5,3)$	4
$(2,4)$	3	$(3,4)$	3,5	$(4,4)$	4	$(5,4)$	4,5
$(2,5)$	3,5	$(3,5)$	4	$(4,5)$	4,5	$(5,5)$	5
						$\sum$	56

$$\tau_{\bar{x}} = \frac{56}{16} = 3{,}5$$

6 – الانحراف المعياري لمتغير توزيع المعاينة للمتوسطات بطريقتين

الطريقة الأولى

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,12}{\sqrt{2}} = 0,79$$

الطريقة الثانية

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_i - \tau_{\bar{x}})^2}{k}} = \sqrt{\frac{(2-3,5)^2+(2,5-3,5)^2+(3-3,5)^2+(3,5-3,5)^2+(2,5-3,5)^2+(3-3,5)^2}{16}}$$

$$\sqrt{\frac{(3,5-3,5)^2+(4-3,5)^2+(3-3,5)^2+(3,5-3,5)^2+(4-3,5)^2+(4,5-3,5)^2}{16}}$$

$$\sqrt{\frac{(3,5-3,5)^2+(4-3,5)^2+(4,5-3,5)^2+(5-3,5)^2}{16}} =$$

$$\sqrt{\frac{2,25+1+0,25+0+1+0,25+0+0,25+0,25+0+0,25+1+0+0,25+1+2,25}{16}} = \frac{10}{16} = 0,79$$

I-1-طبيعة توزيع متغير توزيع المعاينة للمعدلات

يمكن دراسة طبيعة توزيع المعاينة للمتوسطات من خلال نظريتين:

أولا: إذا كان المجتمع الإحصائي موزع طبيعيا بمتوسط حسابي μ وانحراف معياري ϕ، فإن متوسط العينة المسحوبة منه تتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي $\tau_{\bar{x}}$ وانحراف معياري $\sigma_{\bar{x}}$

$$\bar{x} \to N(\tau_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}})$$

ثانيا: **نظرية النهاية المركزية**: إذا كان حجم العينات أكبر ما يمكن $n \succ 30$ فإن متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات $\bar{x}$ يتبع القانون الطبيعي مهما كان توزيع المجتمع:

$$\bar{x} \to N(\tau_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}})$$

ملاحظة

- حالة السحب بدون إرجاع: $\frac{n}{N} \geq 0,05$
- في حالة السحب بالإرجاع: $\frac{n}{N} \prec 0,05$

مثال

إذا كانت الأجور اليومية لإحدى المعامل تتوزع توزيعا طبيعيا بمعدل 10 آلاف دينار، وانحراف معياري يقدر بـ2 آلاف دينار، سحبت عينة حجمها 64 عامل.

-أحسب احتمال أن يكون معدل الأجور أكبر من 11 ألف.

الحل

هذا النوع من الحساب لم يحدد نوع السحب إذا كان بإرجاع أو دون إرجاع، نفرض أن السحب بالإرجاع:

$$\mu = 10, \phi = 2, n = 64$$

بما أن $n \succ 30$ فإن متغير توزيع المعاينة للمتوسطات يتبع القانون الXطبيعي:

$$\bar{x} \to N(\tau_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}})$$
$$\bar{z} \to N(0,1)$$
$$\bar{z} = \frac{\bar{x} - \tau_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}$$

أولا: حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لمتغير توزيع المعاينة للمتوسطات

$$\tau_{\bar{x}} = \mu = 10$$
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{64}} = 0{,}25$$

ثانيا: حساب الاحتمال

$$P(\bar{x} \succ 11) = 1 - P(\bar{x} \le 11) = 1 - P(\frac{\bar{x} - 10}{0{,}25} \le \frac{11 - 10}{0{,}25}) = 1 - P(\bar{z} \le 11) = 1 - 0{,}99997 = 0{,}00003$$

II–متغير توزيع المعاينة من أجل النسب "الترديدات"

إذا تم أخذ عدة عينات $n_1, n_2, n_3, ...n_{k,}$ من مجتمع إحصائي حجمه N، فتكون نسبة تحقق الحدث A لعينة عشوائية حجمها n_1 هو f_1، ونسبة تحقق الحدث A لعينة عشوائية حجمها n_1 هو f_1، وهكذا بالنسبة لكل العينات المسحوبة، وبما أن النسبة "الترديد" تتغير من عينة لأخرى، فإن f يسمى **متغير توزيع المعاينة للنسب**، حيث أن متوسط متغير توزيع المعاينة للنسب يرمز له بالرمز τ_f، ويحسب كالتالي:

$$\tau_f = P$$

حيث أن P هو احتمال الحصول على حدث النجاح، أما الانحراف المعياري لمتغير توزيع المعاينة للنسب يرمز له بالرمز ϕ_f، ويحسب كالتالي:

– في حالة السحب بالإرجاع:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

-في حالة السحب دون إرجاع:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

طبيعة توزيع متغير توزيع المعاينة للنسب

إذا كان $n \succ 30$ فإن متغير توزيع المعاينة للنسب f يتبع القانون الطبيعي $f \to N(\tau_f, \sigma_f)$

مثال

مصنع لإنتاج العلب تبين أن نسبة التلف في العلب هو 25%، تم سحب 500 علبة عشوائيا من هذا المصنع:

1 - أحسب متوسط متغير توزيع المعاينة للنسب؛

2 - أحسب الانحراف المعياري لمتغير توزيع المعاينة للنسب.

الحل

لدينا: حجم المجتمع N مجهول: نفرض أن المجتمع الإحصائي كبير جدا، يعني أن المعاينة فيه غير نفاذية، أي أن السحب يكون بالإرجاع

$n = 500$

$P = 0,25$

1 - حساب متوسط متغير توزيع المعاينة للنسب

$$\tau_f = P = 0,25$$

2 - جساب الانحراف المعياري لمتغير توزيع المعاينة للنسب

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{500}} = 0,019$$

III-متغير توزيع المعاينة من أجل التباين

إذا كان لدينا مجتمع إحصائي مكون من مجوعة المفردات $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$،وقمنا بسحب عينة حجمها n_1 من هذا المجتمع وحساب تباينها $\delta^2{}_1$، ثم نسحب عينة أخرى لها نفس الحجم n_2 ونحسب تباينها $\delta^2{}_2$، ثم عينة ثالثة وهكذا بالنسبة لكل العينات الممكن سحبها من هذا المجتمع، سنحصل على مجموعة جديدة من المفردات هي تباينات هذه العينات، وهي تكون مجتمع إحصائي جديد يسمى مجتمع التباينات للعينات التي

حجمها n والتي يمكن سحبها من المجتمع الأصلي، وتكتب مفردات المجتمع الجديد على النحو $\delta^2{}_1, \delta^2{}_2, \delta^2{}_3, ..., \delta^2{}_k$ ، وهذه التباينات تختلف قيمها عن بعضها، يسمى δ^2 متغير توزيع المعاينة للتباين.

: متغير توزيع المعاينة للتباين

$$\delta^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{k}$$

τ_{δ^2} : متوسط متغير توزيع المعاينة للتباين، ويحسب بالعلاقة التالية:

$$\tau_{\delta^2} = \frac{\sum \delta^2{}_i}{k}$$

ϕ_{δ^2} : الانحراف المعياري لمتغير توزيع المعاينة للتباين، ويحسب بالعلاقة التالية:

$$\sigma_{\delta^2} = \sqrt{\frac{\sum(\delta^2{}_i - \tau_{\delta^2})^2}{k}}$$

ملاحظة

- **في حالة السحب بالإرجاع:**

$$\tau_{\delta^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

- **في حالة السحب دون إرجاع:**

$$\tau_{\delta^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)$$

مثال

ليكن لدينا مجتمع مكون من المفردات التالية: 1,3,5

- أحسب المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة للتباين في حالة السحب بالإرجاع، وحالة السحب دون إرجاع.

الحل

أولا: حساب معالم المجتمع

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{5+3+1}{3} = 3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{(5-3)^2 + (3-3)^2 + (1-3)^2}{3}} = \sqrt{\frac{4+0+4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1,63$$

ثانيا: حساب متوسط متغير توزيع المعاينة للتباين

1 – حالة السحب بالإرجاع

$$k = N^n = 3^2 = 9$$

العينة	$\bar{x}$	δ^2	العينة	$\bar{x}$	δ^2
$(1,1)$	1	0	$(3,5)$	4	1
$(1,3)$	2	1	$(5,1)$	3	4
$(1,5)$	3	4	$(5,3)$	4	1
$(3,1)$	2	1	$(5,5)$	5	0
$(3,3)$	3	0	$\sum$	27	12

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\delta^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-1)^2 + (1-1)^2}{2} = 0$$

$$\tau_{\delta^2} = \frac{\sum \delta^2{}_i}{k} = \frac{12}{9} = 1{,}33$$

للتأكد:

$$\tau_{\delta^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) = (1{,}63)^2\left(\frac{2-1}{2}\right) = 1{,}33$$

2 – حالة السحب دون إرجاع

$$k = C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3.2!}{1.2!} = 3$$

العينة	$\bar{x}$	δ^2
$(1,3)$	2	1
$(1,5)$	3	4
$(3,5)$	4	1
$\sum$	9	6

$$\tau_{\delta^2} = \frac{\sum \delta^2{}_i}{k} = \frac{6}{3} = 2$$

للتأكد:

$$\tau_{\delta^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right) = (1{,}63)^2\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3}{3-1}\right) = 1{,}99 \approx 2$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

من المواضيع الهامة في الإحصاء الاستدلالي **تقدير معالم المجتمع** و**اختبار الفرضيات** بشأن صحة قيم معالم المجتمع، ويتم ذلك عن طريق سحب عينة أو مجموعة من العينات من المجتمع أو المجتمعات المراد تقدير معالمها وإجراء اختبار الفروض بشأنها.

التقدير يستخدم لتقدير معالم المجتمع إذا كان الهدف هو تحديد قيمة معلمة مجهولة، أما اختبار الفروض فيستخدم بهدف الوصول إلى قرار بشأن رفض أو قبول فرض إحصائي عن المعلمة المدروسة.

والتقدير هو أسلوب إحصائي مبني على نظريات إحصائية، يستخدم لتقدير معلمة ما محل الدراسة عن طريق استخدام مقاييس العينة المدروسة، ويوجد أسلوبان لتقدير معلمة المجتمع:

I-التقدير النقطي

وهو من أبسط أنواع التقدير، يستخدم بيانات العينة لتقدير معلمة المجتمع المجهولة بنقطة واحدة فقط، ويسمى أيضا بتقدير مواظب إذا أمكن تقدير هذه المعلمة بقيمة واحدة فقط، **مثلا** قيمة المتوسط الحسابي $\bar{x}$ باعتبارها تقديرا لمعلمة المتوسط الحسابي للمجتمع σ.

مثال1

لدينا (1,2,3,4,5) عينة عشوائية تؤخذ من مجتمع إحصائي ما

التقدير النقطي لمتوسط المجتمع هو متوسط العينة

$$\mu = \bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

مثال2

متوسط تقاد امتحان الإحصاء 3 للفوج 2 من قسم العلوم التجارية هو $\bar{x} = 14$، وعليه فإن $\bar{x} = 14$ هو تقدير نقدي لمتوسط المجتمع الذي يمثل كل الطلبة $\bar{x} = \mu = 14$

II-التقدير بمجال

في عديد من الحالات عملية التقدير النقطي تتضمن بعض الأخطاء، لذا يجب إعطاء مجال معين لتوقع وقوع معالم المجتمع، يسمى **بمجال الثقة** الذي تنتمي إليه المعلمة المجهولة، أي احتمال وقوع المعلمة في هذا المجال.

$]a,b[$: تسمى درجة الثقة حيث أن a و b هي حدود مجال الثقة

$(1-\alpha)$: هو مستوى الثقة

$$P(a \prec \phi \prec b) = (1-\alpha)$$

ومكمل هذه القيمة يسمى مستوى المعنوية α (مستوى الخطأ)، فإذاكان مستوى الثقة 95% فإن مستوى المعنوية هو 5% (95%+5%=100%)

1–مجالات الثقة للمعدلات (المتوسطات)

1–1–حالة الانحراف المعياري σ معلوم (مهما كان حجم العينة)

إذا افترضنا أن المعلمة المجهولة التي نريد تقديرها هي المتوسط الحسابي للمجتمع μ ،فإننا نستخدم التوزيع الطبيعي لتحديد مجال الثقة، إذا علمنا أن المجتمع الذي سحبت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي، وفي حالة العينة $n \geq 30$ يمكن تطبيق نظرية النهاية المركزية ونبحث عن مجال الثقة باستخدام الطريقة التالية:

$$\bar{x} \to N(\mu, \sigma_{\bar{x}})$$
$$\bar{z} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \to N(0,1)$$

لتكن ϕ الدالة التوزيعية للقانون العادي $N(0,1)$ ، نبحث عن مجال يحتوي على μ باحتمال قدره $(1-\alpha)$ ونبحث عن قيمة $\mu_{(1-\alpha)}$.

$$P(|z| \prec \mu_{(1-\alpha)}) = (1-\alpha) \Rightarrow P(-\mu_{(1-\alpha)} \prec z \prec \mu_{(1-\alpha)}) = (1-\alpha) \Rightarrow \phi(\mu_{(1-\alpha)}) - \phi(-\mu_{(1-\alpha)}) = (1-\alpha)$$
$$\phi(\mu_{(1-\alpha)}) - [1 - \phi(\mu_{(1-\alpha)})] = (1-\alpha) \Rightarrow \phi(\mu_{(1-\alpha)}) - 1 + \phi(\mu_{(1-\alpha)}) = (1-\alpha)$$
$$2\phi(\mu_{(1-\alpha)}) - 1 = (1-\alpha) \Rightarrow \phi(\mu_{(1-\alpha)}) = \frac{(1-\alpha)+1}{2} ....I$$

تستخرج قيمة $\mu_{(1-\alpha)}$ من جدول القانون العادي $N(0,1)$.

$$|\bar{z}| \prec \mu_{(1-\alpha)} \Rightarrow -\mu_{(1-\alpha)} \prec \bar{z} \prec \mu_{(1-\alpha)} \Rightarrow -\mu_{(1-\alpha)} \prec \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \prec \mu_{(1-\alpha)} \Rightarrow -\mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}} \prec \bar{x} - \mu \prec \mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}$$
$$-\bar{x} - \mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}} \prec -\mu \prec -\bar{x} + \mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}} ....(-1) \Rightarrow \bar{x} - \mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}} \prec \mu \prec \bar{x} + \mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}$$
$$\mu \in \left]\bar{x} - \mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + \mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}\right[$$

مثال

مجتمع إحصائي ذو انحراف معياري $\sigma = 50$ ، سحبت منه عينة $n = 400$ ، وكان متوسط العينة $\bar{x} = 200$.

1 – أوجد التقدير النقطي للمتوسط الحسابي للمجتمع ؛

2 – أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع بمستوى ثقة قدره 95%.

الحل

1 – التقدير النقطي

$$\bar{x} = \mu = 200$$

2 – التقدير بمجال

أولا: تحديد طبيعة التوزيع الطبيعي

بما أن $30 \succ (n = 400)$ فإن:

$$\bar{x} \to N(\mu, \sigma_{\bar{x}})$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \to N(0,1)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{50}{\sqrt{400}} = 2,5$$

$$\bar{z} = \frac{200 - \mu}{2,5}$$

ثانيا: تحديد قيمة $\mu_{(1-\alpha)}$

لدينا ϕ الدالة التوزيعية للقانون العادي $N(0,1)$

$$\phi(\mu_{(1-\alpha)}) = \frac{0,95 + 1}{2} = 0,975$$

$$\phi(\mu_{(1-\alpha)}) = 0,975 \Rightarrow \mu_{(1-\alpha)} = 1,96$$

ثالثا: تحديد مجال الثقة

$$\mu \in \left]\bar{x} - \mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + \mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}\right[\Rightarrow \mu \in \left]200 - (1,96.2,5), 200 + (1,96.2,5)\right[\Rightarrow \mu \in \left]195,1,204,9\right[$$

2–حالة الانحراف المعياري σ غير معلوم

2–1–إذا كانت العينة كبيرة $n \geq 30$

متغير توزيع المعاينة للمعدلات يتبع التوزيع الطبيعي، في هذه الحالة نعوض قيمة انحراف المجتمع σ بالمقدر النقطي $\hat{\delta}$:

$$E(\hat{\delta}) = \sigma$$

تباين العينة المقدر

$$\hat{\delta}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

الانحراف المعياري المقدر للمجتمع

$$\hat{\delta} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\hat{\delta} = \sigma$$

مثال

ليكن لدينا مجتمع إحصائي سحبت منه عينة عشوائية حجمها 30 وانحرافها المعياري 3,24 ووسطها الحسابي 9,5

- أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ بمستوى خطأ 5%.

الحل

لدينا حجم العينة $30 \geq (n=30)$ وانحراف المجتمع σ مجهول، وبالتالي متغير توزيع المعاينة للمتوسطات يتبع القانون الطبيعي:

$$\bar{x} \to N(\mu, \sigma_{\bar{x}})$$
$$\bar{z} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} \to N(0,1)$$

أولا: حساب قيمة $\sigma_{\bar{x}}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\hat{\delta}}{\sqrt{n}} = \frac{3,24}{5,48} = 0,59$$

حيث أن $\hat{\delta}$ هو مقدر مواظب دون تحيز لـ σ

$$\bar{x} \to N(\mu, 0,59)$$
$$\bar{z} = \frac{9,5-\mu}{0,59} \to N(0,1)$$

ثانيا: حساب قيمة $(\mu_{(1-\alpha)})$

لدينا ϕ الدالة التوزيعية للقانون العادي $N(0,1)$

$$\phi(\mu_{(1-\alpha)}) = \frac{(1-0,05)+1}{2} = \frac{0,95+1}{2} = 0,975$$
$$\phi(\mu_{(1-\alpha)}) = 0,975 \Rightarrow \mu_{(1-\alpha)} = 1,96$$

ثالثا: تحديد مجال الثقة

$$\mu \in \left]\bar{x} - \mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + \mu_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}\right[\Rightarrow \mu \in \left]9,5-(1,96.0,59), 9,5+(1,96.0,59)\right[\Rightarrow \mu \in \left]8,34, 10,65\right[$$

2-2-إذا كانت العينة صغيرة $n \prec 30$

إذا كان حجم المجتمع موزع طبيعيا، من أجل عينة ذات الحجم أق من 30 بانحراف معياري مجهول نعتمد على قانون ستودنت من أجل تحديد مجال الثقة، نعوض الانحراف المعياري للمجتمع σ بالمقدر المواظب دون تحيز $\hat{\delta}$، حيث أن المتغير T يتبع قانون ستودنت ذو درجة الحرية $(n-1)$ حيث أن:

$$T = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

مثال

لدينا العينة التالية التي تمثل مستوى السكر لمحاليل منتجة من طرف مصنع ما تعطى كما يلي:

$$19{,}5-19{,}7-19{,}8-20{,}2-20{,}2-20{,}3-20{,}4-20{,}8$$

1 - أحسب كل من المتوسط الحسابي $\bar{x}$ والانحراف المعياري المقدر $\hat{\delta}$

2 - أوجد مجال الثقة لمعدل السكر في المحلول بمستوى ثقة قدره 95%.

الحل

1 - حساب المتوسط الحسابي $\bar{x}$ والانحراف المعياري المقدر $\hat{\delta}$

$$\bar{x}=\frac{19{,}5+19{,}7+19{,}8+20{,}2+20{,}2+20{,}3+20{,}4+20{,}8}{8}=20{,}11$$

$$\hat{\delta}^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{(19{,}5-20{,}11)^2+(19{,}7-20{,}11)^2+(19{,}8-20{,}11)^2+(20{,}2-20{,}11)^2}{7}$$

$$\frac{(20{,}2-20{,}11)^2+(20{,}3-20{,}11)^2+(20{,}4-20{,}11)^2+(20{,}8-20{,}11)^2}{7}=0{,}1784$$

$$\hat{\delta}=\sqrt{\hat{\delta}^2}=\sqrt{0{,}1784}=0{,}42$$

2 - حساب مجال الثقة لمعدل السكر في المحلول بمستوى ثقة قدره 95%

أولا: تحديد طبيعة التوزيع الطبيعي

بما أن $30 \succ (n=8)$ فإن المتغير العشوائي لمتغير توزيع المعاينة للمتوسطات يتبع قانون ستودنت بدرجة حرية $v=n-1=8-1=7$:

$$T \to t_{(n-1)}$$

$$T=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\hat{\delta}}{\sqrt{n}}=\frac{0{,}42}{\sqrt{8}}=0{,}15$$

$$T=\frac{20{,}11-\mu}{0{,}15}$$

ثانيا: تحديد قيمة $t_{(1-\alpha)}$

لدينا G الدالة التوزيعية لقانون ستودنت، نبحث عن مجال يحتوي على μ باحتمال قدره $(1-\alpha)$ ونبحث عن قيمة $t_{(1-\alpha)}$.

$$P(|T| \prec t_{(1-\alpha)}) = (1-\alpha) \Rightarrow P(-t_{(1-\alpha)} \prec T \prec t_{(1-\alpha)}) = (1-\alpha) \Rightarrow G(t_{(1-\alpha)}) - G(-t_{(1-\alpha)}) = (1-\alpha)$$

$$G(t_{(1-\alpha)}) - \left[1 - G(t_{(1-\alpha)})\right] = (1-\alpha) \Rightarrow G(t_{(1-\alpha)}) - 1 + G(t_{(1-\alpha)}) = (1-\alpha)$$

$$2G(t_{(1-\alpha)}) - 1 = (1-\alpha) \Rightarrow G(t_{(1-\alpha)}) = \frac{(1-\alpha)+1}{2} = \frac{0,95+1}{2} = 0,975$$

$$G(t_{(1-\alpha)}) = P(T \prec t_{(1-\alpha)}) = 0,975$$

$$P(T \succ t_{(1-\alpha)}) = 1 - P(T \prec t_{(1-\alpha)}) = 1 - 0,975 = 0,025$$

$$\begin{cases} P(T \succ t_{(1-\alpha)}) = 0,025 \\ v = 7 \end{cases}$$

تستخرج قيمة $t_{(1-\alpha)}$ من جدول قانون ستودنت.

$$t_{(1-\alpha)} = 2,365$$

ثالثا: تحديد مجال الثقة

$$|T| \prec t_{(1-\alpha)} \Rightarrow -t_{(1-\alpha)} \prec T \prec t_{(1-\alpha)} \Rightarrow -t_{(1-\alpha)} \prec \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} \prec t_{(1-\alpha)} \Rightarrow -t_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}} \prec \bar{x}-\mu \prec t_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}$$

$$-\bar{x} - t_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}} \prec -\mu \prec -\bar{x} + t_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}} ....(-1) \Rightarrow \bar{x} - t_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}} \prec \mu \prec \bar{x} + t_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}$$

$$\mu \in \left]\bar{x} - t_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + t_{(1-\alpha)}\sigma_{\bar{x}}\right[\Rightarrow \mu \in \left]20,11 - (2,365.0,15), 20,11 + (2,365.0,15)\right[\Rightarrow \mu \in \left]19,75, 20,46\right[$$