قوانين الاحتمال الخاصة بالمتغيرات العشوائية المستمرة

أولا: القانون المنتظم

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع القانون المنتظم في المجال $[a,b]$ حيث $a \prec b$ إذا كان كثافة احتماله تكتب من الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a;b] \\ 0 & x \notin [a;b] \end{cases}$$

ودالة توزيعه تكتب على الشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \prec a \\ \dfrac{x-a}{x-b} & a \le x \le b \\ 1 & x \succ b \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

مثال:

X متغير عشوائي يتبع القانون المنتظم في المجال $[0;5]$ أحسب كل من:

$P(x \le 3)$

$P(x \succ 2)$

$p(3 \le x \le 4$

الحل:

$$[a,b] = [0,5]$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-0} & x \in [0,5] \\ 0 & x \notin [0,5] \end{cases}$$

$$P(x \le 3) = F(3)$$

$$\int_{-\infty}^{3} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx = 0 + \frac{1}{5}\int_{0}^{3} dx = \frac{1}{5}[x]_0^3 = \frac{1}{5}[3-0] = \frac{3}{5}$$

$$P(x \le 3) = \frac{3}{5}$$

$P(x \succ 2) = 1 - P(x \le 2) = 1 - F(2)$

$P(x \le 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = 0 + \frac{1}{5}\int_{0}^{2} dx = \frac{1}{5}[x]_0^2 = \frac{1}{5}[2-0] = \frac{2}{5}$

$P(x \le 3) = \frac{2}{5}$

$P(x \succ 2) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(3 \le x \le 4) = F(4) - F(3) = \int_{3}^{4} f(x)dx = \frac{1}{5}\int_{3}^{4} dx = \frac{1}{5}[x]_3^4 = \frac{1}{5}[4-3] = \frac{1}{5}$

$P(3 \le x \le 4) = \frac{1}{5}$

ثانيا: القانون الطبيعي

نقول أن المتغير العشوائي المستمر X يتبع القانون الطبيعي ذو الوسيطين (μ,σ) إذا كانت كثافة احتماله تكتب من الشكل التالي:

$$R = [0,1]$$
$$I : x \to f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

تم اكتشاف القانون الطبيعي من طرف العالم الرياضي abraham demoisw سنة 1733 من أجل استعماله في:

- تقريب الاحتمالات المتعلقة بالمتغيرات العشوائية التي تتبع قانون ثنائي الحد لما يكون الوسيط μ أكبر ما يمكن؛
- تغيرات أطوال القطع المنتجة من طرف آلات معينة؛
- توزيع أطوال القامة لمجموعة سكان معينة.

ثالثا: القانون العادي

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع القانون العادي إذا كانت كثافة احتماله تكتب على الشكل التالي:

$$I : R \to [0,1]$$
$$x \to f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ودالة التوزيع للقانون العادي σ معرفة كما يلي:

$$\phi : R \to [0,1]$$
$$x \to f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}dt}$$

خواص دالة التوزيع للقانون العادي

$$\phi(-x)=1-\phi(x)$$
$$P(a \prec x \prec b)=\phi(b)-\phi(a)$$
$$\forall a,b \in R, a \prec b$$
$$P(x \leq a)=\phi(a)$$
$$P(x \succ b)=1-P(x \leq b)=1-\phi(b)$$

ملاحظات

- المتغير العشوائي X يتبع القانون العادي أي أن: $x \to N(0,1)$
- المتغير العشوائي X يتبع القانون الطبيعي $x \to N(\mu,\sigma)$ حيث أن: $\mu=0, \sigma=1$
- إذا كان المتغير العشوائي X يتبع القانون الطبيعي ذو المتغيرين μ,σ فإن المتغير العشوائي Z يتبع القانون العادي حيث:

$$x \to N(\mu,\sigma)$$
$$z \to N(0,1)$$
$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

مثال

ليكن X متغير عشوائي مستمر يتبع القانون الطبيعي $x \to N(8,5)$، أحسب ما يلي:

$$P(7 \leq x \leq 9)$$
$$P(-2 \leq x \leq 2)$$

الحل

$$x \to N(8,5)$$

لدينا: المتغير العشوائي X يتبع القانون الطبيعي ذو المعدل $\mu=8$ والانحراف المعياري $\sigma=5$، فإن المتغير العشوائي Z يتبع القانون العادي $z \to N(0,1)$ حيث أن: $z=\frac{x-8}{5}$

لتكن ϕ الدالة التوزيعية للقانون العادي:

$$P(7 \leq x \leq 9)=P(7-8 \leq x-8 \leq 9-8)=P(\frac{7-8}{5} \leq \frac{x-8}{5} \leq \frac{9-8}{5})=$$
$$(-0,2 \leq z \leq 0,2)=\phi(0,2)-\phi(-0,2)=\phi(0,2)-[1-\phi(0,2)]=\phi(0,2)-1+\phi(0,2)=$$
$$2\phi(0,2)-1=2(0,5793)-1=0,1586$$
$$P(-2 \leq x \leq 2)=P(-2-8 \leq x-8 \leq 2-8)=P(\frac{-2-8}{5} \leq \frac{x-8}{5} \leq \frac{2-8}{5})=$$
$$P(-2 \leq z \leq -1,2)=\phi(-2)-\phi(-1,2)=[1-\phi(2)]-[1-\phi(1,2)]=\phi(1,2)-\phi(2)=0,9772-0,8849=0,0923$$

التمرين (01)

ليكن X_i المتغير العشوائي الذي يتبع القانون الطبيعي $N(60,5)$:

1-أحسب ما يلي:

$$P(X \succ 65), P(X \leq 63), P(56 \leq X \leq 63)$$

2-أوجد قيم كل من a, b, c بحيث:

$$P(X \leq a) = 0{,}7, P(X \leq b) = 0.4, P(X \succ c) = 0{,}5$$

التمرين (02)

يتقدم 20000 طالب لإجراء امتحان في شهر جوان، معدل النقط المتحصل عليها من طرف كل طالب يتبع القانون الطبيعي ذي المعدل $\mu = 9$ والانحراف المعياري $\sigma = 4$، فنصنف الحالات الآتية:

- المترشحون الذين تحصلوا على معدل أعلى من 12.
- المترشحون الذين تحصلوا على المعدل يتراوح ما بين 9و 12 هم معنيون لإجراء الامتحان التقويمي الشفوي الاستدراكي.
- المترشحون الذين تحصلوا على المعدل يتراوح ما بين 7 و 9 هم معنيون لإجراء امتحان آخر في شهر أكتوبر.
- بقية المترشحون هم الراسبون في هذا الامتحان لهذه السنة.

المطلوب: أوجد في كل حالة من الحالات السابقة عدد الطلبة المعنيين.

التمرين (03)

معدل الطول لمجموعة من الفئران هو 61 مم والانحراف المعياري 8 مم، علما أن طول الفئران يتبع القانون الطبيعي.

1-ما هي قيمة الاحتمال بحيث يكون طول الفأر ما: أكبر من 80، أقل من 50، بين 50 و 80.

2-أوجد قيمة كل من a, b, c بحيث:

- احتمال أن يكون طول الفأر أقل من a هو 0,5.
- احتمال أن يكون طول الفأر أقل من b هو 0,67.
- احتمال أن يكون طول الفأر أكبر من c هو 0,33.

حل التمرين (01)

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع القانون الطبيعي $x \to N(60,5)$، فإن المتغير العشوائي Z يتبع القانون العادي $z \to N(0,1)$

1-حساب الاحتمالات

$$P(x \succ 65) = 1 - P(x \le 65) = 1 - P(x - 60 \le 65 - 60) = 1 - P\left(\frac{x-60}{5} \le \frac{65-60}{5}\right)$$
$$= 1 - P(z \le 1) = 1 - \phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$
$$P(x \le 63) = P(x - 60 \le 63 - 60) = P\left(\frac{x-60}{5} \le \frac{63-60}{5}\right) = P(Z \le 0{,}6) = \phi(0{,}6) = 0{,}7257$$
$$P(56 \le x \le 63) = P(56 - 60 \le x - 60 \le 63 - 60) = P\left(\frac{56-60}{5} \le \frac{x-60}{5} \le \frac{63-60}{5}\right)$$
$$= P(-0{,}8 \le z \le 0{,}6) = \phi(0{,}6) - \phi(-0{,}8) = \phi(0{,}6) - [1 - \phi(0{,}8)] = \phi(0{,}6) - 1 + \phi(0{,}8)$$
$$= 0{,}7257 - 1 + 0{,}7881 = 0{,}5138$$

2-حساب المجاهيل a,b,c

$$P(x \le a) = 0{,}7 \Rightarrow P(x - 60 \le a - 60) = 0{,}7 \Rightarrow P\left(\frac{x-60}{5} \le \frac{a-60}{5}\right) = 0{,}7 \Rightarrow$$
$$P\left(z \le \frac{a-60}{5}\right) = 0{,}7 \Rightarrow \phi\left(\frac{a-60}{5}\right) = 0{,}7$$

ومن جدول التوزيع لدينا القيمة 0,7 تساوي بالتقريب القيمة 0,6985 وهي القيمة المقابلة ل $\phi(0{,}52)$:

$$\frac{a-60}{5} = 0{,}52 \Rightarrow a - 60 = 0{,}52 * 5 \Rightarrow a = 2{,}6 + 60 \Rightarrow a = 62{,}6$$

$$P(x \le b) = 0{,}4 \Rightarrow P(x - 60 \le b - 60) = 0{,}4 \Rightarrow P\left(\frac{x-60}{5} \le \frac{b-60}{5}\right) = 0{,}4 \Rightarrow$$
$$P\left(z \le \frac{b-60}{5}\right) = 0{,}4 \Rightarrow \phi\left(\frac{b-60}{5}\right) = 0{,}4$$

نضع: $\left(\frac{b-60}{5}\right) = b'$

يصبح لدينا: $\phi(b') = 0{,}4$

بما أن $0{,}4 \prec 0{,}5$ فإن قيمة b' قيمة سالبة، وقيمته الموجبة هي -b':

$$\phi(b') + \phi(-b') = 1 \Rightarrow \phi(-b') = 1 - \phi(b') \Rightarrow \phi(-b') = 1 - 0{,}4 \Rightarrow \phi(-b') = 0{,}6$$

ومن جدول التوزيع لدينا القيمة 0,6 تقابل القيمة $\phi(0{,}25)$: أي أن:

$$\phi(-b') = \phi(0,25) \Rightarrow -b' = 0,25 \Rightarrow b' = -0,25$$

$$\begin{cases} b' = -0,25 \\ b' = \dfrac{b-60}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{b-60}{5} = -0,25 \Rightarrow b-60 = -0,25*5 \Rightarrow b = -1,25+60 \Rightarrow b = 58,75$$

$$P(x \succ c) = 0,5 \Rightarrow 1-P(x-60 \le c-60) = 0,5 \Rightarrow 1-P(\frac{x-60}{5} \le \frac{c-60}{5}) = 0,5 \Rightarrow$$

$$1-P(z \le c') = 0,5 \Rightarrow P(z \le c') = 1-0,5 \Rightarrow P(z \le c') = 0,5$$

ومن جدول التوزيع لدينا القيمة 0,5 تقابل القيمة $\phi(0)$: أي أن:

$$\phi(c') = \phi(0,25) \Rightarrow -b' = 0,25 \Rightarrow b' = -0,25$$

$$\begin{cases} b' = -0,25 \\ b' = \dfrac{b-60}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{b-60}{5} = -0,25 \Rightarrow b-60 = 0,25*5 \Rightarrow b = 1,25+60 \Rightarrow b = 61,25$$

حل التمرين (02)

لدينا: X هو معدل النقط المتحصل عليها من طرف كل طالب

و: $x \to N(9,4)$

إذا: $z \to N(0,1)$

أولا: حساب احتمال حصول الطلبة على معدلات كل حالة

$$P(x \succ 12) = P(\frac{x-9}{4} \succ \frac{12-9}{4}) = P(z \succ 0,75) = 1-P(z \le 0,75) = 1-\phi(0,75) = 1-0,7734 = 0,2266$$

$$P(9 \le x \le 12) = P(\frac{9-9}{4} \le \frac{x-9}{4} \le \frac{12-9}{4}) = P(0 \le z \le 0,75) = \phi(0,75)-\phi(0) = 0,7734-0,5 = 0,2734$$

$$P(7 \le x \le 9) = P(\frac{7-9}{4} \le \frac{x-9}{4} \le \frac{9-9}{4}) = P(-0,5 \le z \le 0) = \phi(0)-\phi(-0,5) =$$

$$\phi(0)-[1-\phi(0,5)] = \phi(0)-1+\phi(0,5) = 0,5-1+0,6915 = 0,1915$$

$$P(x \le 7) = P(\frac{x-9}{4} \le \frac{7-9}{4}) = P(z \le -0,5) = \phi(-0,5) = 1-\phi(0,5) = 1-0,6915 = 0,3085$$

ثانيا: حساب عدد الطلبة في كل حالة

الحالة1 $= 0,2266*20000 = 4532$ طالب

الحالة2 $= 0,2734*20000 = 5468$ طالب

الحالة3 $= 0,1915*20000 = 3830$ طالب

الحالة4 $= 0,3085*20000 = 6170$ طالب

حل التمرين (03)

لدينا: X هو دول الفئران

و: $x \to N(61,8)$

إذا: $z \to N(0,1)$

1-حساب الاحتمالات

$$P(x \succ 80) = P(\frac{x-61}{8} \succ \frac{80-61}{8}) = P(z \succ 2,375) = 1 - P(z \leq 2,375) = 1 - \phi(2,375) =$$
$$1 - 0,9913 = 0,0087$$

$$P(x \leq 50) = P(\frac{x-61}{8} \leq \frac{50-61}{8}) = P(z \leq -1,375) = \phi(-1,375) = 1 - \phi(1,375) =$$
$$1 - 0,9162 = 0,0838$$

2-حساب المجاهيل a,b ,c

$$P(x \leq a) = 0,5 \Rightarrow P(\frac{x-61}{8} \leq \frac{a-61}{8}) = 0,5 \Rightarrow P(z \leq a') = 0,5 \Rightarrow \phi(a') = 0,5$$
$$\phi(0) = 0,5 \Rightarrow a' = 0 \Rightarrow \frac{a-61}{8} = 0 \Rightarrow a = 61$$

$$P(x \leq b) = 0,67 \Rightarrow P(\frac{x-61}{8} \leq \frac{b-61}{8}) = 0,67 \Rightarrow P(z \leq b') = 0,67 \Rightarrow \phi(b') = 0,67$$
$$\Rightarrow \phi(0,44) = 0,67 \Rightarrow \frac{b-61}{8} = 0,44 \Rightarrow b - 61 = 0,44 * 8 \Rightarrow b = 3,52 + 61 \Rightarrow b = 64,52$$

$$P(x \succ c) = 0,33 \Rightarrow P(\frac{x-61}{8} \succ \frac{c-61}{8}) = 0,33 \Rightarrow P(z \succ c') = 0,33 \Rightarrow 1 - P(z \leq c') = 0,33 \Rightarrow$$
$$P(z \leq c') = 1 - 0,33 \Rightarrow P(z \leq c') = 0,67 \Rightarrow \phi(c') = 0,67$$
$$\Rightarrow \phi(0,44) = 0,67 \Rightarrow \frac{c-61}{8} = 0,44 \Rightarrow c - 61 = 0,44 * 8 \Rightarrow c = 3,52 + 61 \Rightarrow c = 64,52$$

التمرين (01)

لدينا مجتمع احصائي مكون من 5 طلبة، وليكن عدد المواد التي نجحوا فيها موزعة كما يلي:

E	D	C	B	A	الطالب
1	2	4	4	3	عدد المواد

1. ما هي كل العينات الممكن سحبها بحجم $n = 2$ (السحب بدون إرجاع)؛
2. أحسب معدل كل عينة؛
3. أحسب المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة وانحرافها المعياري؛
4. أحسب معالم المجتمع الإحصائي (المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للمجتمع).

التمرين (02)

إذا كان لدينا مجتمع يتكون من المفردات التالية:

$$X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 3$$

1. أوجد متوسط وتباين المجتمع؛
2. أوجد متغير توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينات ذات الحجم $n = 2$ التي يمكن سحبها من هذا المجتمع في حالة السحب بإرجاع؛
3. أوجد المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة وانحرافها المعياري؛

التمرين (03)

بهدف التحقق من معدل الاستهلاك الشهري العائلي من الأسماك، أجريت دراسة على عينة عشوائية عددها 35 عائلة، وتبين أن متوسط الاستهلاك الشهري من الأسماك للعينة هو 7,5 كغ، بانحراف معياري للعينة 1,461.

1. أحسب احتمال أن يفوق معدل الاستهلاك الشهري من الأسماك 8كغ.

التمرين (04)

متوسط مجموعة السكان ذات حجم $N = 10000$ هو $\mu = 10$، والانحراف المعياري $\sigma = 3$، أوجد احتمال أن يكون متوسط العينة ذات حجم $n = 64$ محصورا بين 9 و11.

التمرين (05)

ليكن لدينا مجتمع احصائي حجمه $N=900$ ومتوسطه $\mu=20$، وانحرافه المعياري $\sigma=12$:

1. أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للعينة في الحالة $n=36$ و $n=64$.

التمرين (06)

تدرس شركة طيران إمكانية السماح بحمولة يدوية للزبون مجانية، وقد وجد أن المتوسط للحمولة بالكيلوغرام هو $\mu=5$، $\sigma=0{,}5$.

1. إذا أخذت عينة من 100 راكب، ما هو المتوسط المتوقع للحمولة اليدوية في العينة؛
2. هل تنطبق نظرية النهاية المركزية ؟ ولماذا؟
3. أحسب احتمال أن يكون الوزن الإجمالي للأمتعة – بين 500 و515 كغ.
   - أقل من 515 كغ.

التمرين (07)

في دراسة لأرصدة عملاء بنك تبين أنها تتبع التوزيع الطبيعي بـــ $\mu=13600$ و $\sigma=600$، اذا قمنا بسحب 60 عينة حجم كل منها 9 حسابات من مجمع الحسابات المفتوحة وعددها 6000 حساب.

1. أحسب المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة وانحرافها المعياري؛ في حالة المعاينة النفاذية والغير النفاذية؛
2. هل يمكن إهمال معامل التصحيح ؟ ولماذا؟
3. ماهي عدد العينات التي يكون فيها $\bar{X}$ محصورا بين 13600 و13800؟ وأقل من 13800.

حل التمرين (01)

1. العينات الممكن سحبها بحجم $n=2$ (السحب بدون إرجاع)

$$C_N^n = \frac{N!}{(N-n)!n!} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{120}{6.2} = 10$$

2. حساب معدل كل عينة

العينة	$\bar{x}$	العينة	$\bar{x}$	العينة	$\bar{x}$
$(3,4)$	3,5	$(4,4)$	4	$(4,1)$	2,5
$(3,4)$	3,5	$(4,2)$	3	$(2,1)$	1,5
$(3,2)$	2,5	$(4,1)$	2,5	$\sum$	**28**
$(3,1)$	2	$(4,2)$	3		

3. أحسب المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة وانحرافها المعياري

حل التمرين (03)

$n=35$ ، $\tau_{\bar{x}}=7,5$ ، $\sigma_{\bar{x}}=1,461$.

- **حساب احتمال أن يفوق معدل الاستهلاك الشهري من الأسماك8كغ**

بما أن حجم العينة أكبر من 30، فإن متغير توزيع المعاينة للمتوسطات يتبع التوزيع الطبيعي ذو الوسيطين:

$\tau_{\bar{x}}=7,5$ و $\sigma_{\bar{x}}=1,461$

$$\bar{x} \to N(\tau_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}})$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{x}-\tau_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \to N(0,1)$$

$$P(\bar{x} \succ 8) = P(\frac{\bar{x}-7,5}{1,461} \succ \frac{8-7,5}{1,461}) = P(\bar{z} \succ 0,34) = [1-P(\bar{z} \le 0,34)] = 1-\phi(0,34) =$$

$$1-0,6331 = 0,3669$$

$$P(\bar{x} \succ 8) = 0,3669$$

حل التمرين (04)

$N=10000$ ، $\mu=10$ ، $\sigma=3$

- ايجاد احتمال أن يكون متوسط العينة ذات حجم $n=64$ محصورا بين 9 و11

بما أن حجم العينة أكبر من 30، فإن متغير توزيع المعاينة للمتوسطات يتبع التوزيع الطبيعي ذو الوسيطين: $\tau_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$

أولا: حساب قيمة المتوسط الحسابي بمتغير توزيع المعاينة للمتوسطات $\tau_{\bar{x}}$

$$\tau_{\bar{x}} = \mu = 10$$

ثانيا: حساب قيمة الانحراف المعياري لمتغير توزيع المعاينة للمتوسطات

لحساب الانحراف المعياري للمعاينة يجب تحديد نوع السحب إذا بالإرجاع أو دون إرجاع اعتمادا على القانون التالي:

$$\left(\frac{n}{N} = \frac{64}{10000} = 0{,}0064\right) \prec 0{,}05$$

وبالتالي لدينا حالة السحب بالإرجاع

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{64}} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

$$\bar{x} \to N(\tau_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}})$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{x} - \tau_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \to N(0,1)$$

$$P(9 \le \bar{x} \le 11) = P\left(\frac{9-10}{0{,}375} \le \frac{\bar{x}-10}{0{,}375} \le \frac{11-10}{0{,}375}\right) = P(-2{,}67 \le \bar{z} \le 2{,}67) =$$

$$\phi(2{,}67) - \phi(-2{,}67) = \phi(2{,}67) - [1 - \phi(2{,}67)] = 2\phi(2{,}67) - 1 = 2(0{,}9962) - 1 = 0{,}9924$$

$$P(9 \le \bar{x} \le 11) = 0{,}9924$$

حل التمرين (05)

$\sigma = 12$ ، $\mu = 20$ ، $N = 900$

1 – حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للعينة في الحالة $n = 36$

- **المتوسط الحسابي**

$$\tau_{\bar{x}} = \mu = 20$$

- **الانحراف المعياري**

نحدد نوع السحب أولا: وبما أن:

$$\left(\frac{n}{N} = \frac{36}{900} = 0{,}04\right) \prec 0{,}05$$

فإن: حالة السحب بالإرجاع

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} = 2$$

2 – **حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للعينة في الحالة $n = 64$.**

- **المتوسط الحسابي**

$$\tau_{\bar{x}} = \mu = 20$$

- **الانحراف المعياري**

نحدد نوع السحب أولا: وبما أن:

$$\left(\frac{n}{N} = \frac{64}{900} = 0,07\right) \geq 0,05$$

فإن: حالة السحب بدون إرجاع

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{12}{\sqrt{64}}\sqrt{\frac{900-64}{900-1}} = 1,446 \approx 1,45$$

حل التمرين (06)

$\mu = 5$ ، $\sigma = 0,5$ ، $n = 100$

1. **حساب المتوسط المتوقع للحمولة اليدوية في العينة**

$$\tau_{\bar{x}} = \mu = 5$$

2. **هل تنطبق نظرية النهاية المركزية ؟ ولماذا؟**

نعم تنطبق نظرية النهاية المركزية، لأن حجم العينة أكبر من 30، وبالتالي فإن متغير توزيع المعاينة يتبع التوزيع الطبيعي ذو الوسيطين: $\tau_{\bar{x}}$ و $\sigma_{\bar{x}}$ مهما كانت طبيعة التوزيع الإحصائي للمجتمع الأصلي:

$$\bar{x} \rightarrow N(\tau_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}})$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{x} - \tau_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \rightarrow N(0,1)$$

ولتحديد قيمة $\sigma_{\bar{x}}$ نفترض أن حجم المجتمع كبير جدا، وبالتالي حالة المعاينة غير النفاذية، وبالتالي حالة السحب بالإرجاع:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,5}{\sqrt{100}} = \frac{0,5}{10} = 0,05$$

وبالتالي:

$$\bar{x} \rightarrow N(5,0,05)$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{x} - 5}{0,05} \rightarrow N(0,1)$$

3. **حساب احتمال أن يكون الوزن الإجمالي للأمتعة – بين500 و515 كغ**

$$\begin{cases} P(500 \le \sum x_i \le 515) \\ \bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} \end{cases} \Rightarrow P(\frac{500}{100} \le \frac{\sum x_i}{100} \le \frac{515}{100}) = P(5 \le \bar{x} \le 5{,}15)$$

$$P(\frac{5-5}{0{,}05} \le \frac{\bar{x}-5}{0{,}05} \le \frac{5{,}15-5}{0{,}05}) = P(0 \le \bar{z} \le 3) = \phi(3) - \phi(0) = 0{,}99865 - 0{,}5$$

$$P(500 \le \sum x_i \le 515) = 0{,}49865$$

4. حساب احتمال أن يكون الوزن الإجمالي للأمتعة- أقل من515 كغ

$$\begin{cases} P(\sum x_i \le 515) \\ \bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} \end{cases} \Rightarrow P(\frac{\sum x_i}{100} \le \frac{515}{100}) = P(\bar{x} \le 5{,}15)$$

$$P(\frac{\bar{x}-5}{0{,}05} \le \frac{5{,}15-5}{0{,}05}) = P(\bar{z} \le 3) = \phi(3) = 0{,}99865$$

$$P(\sum x_i \le 515) = 0{,}99865$$

حل التمرين (07)

$\mu = 13600$ ، $\sigma = 600$ ، 60 عينة، $n = 9$ ، $N = 6000$.

1 - حساب المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة وانحرافها المعياري؛ في حالة المعاينة النفاذية وغير النفاذية؛

أولا: حالة المعاينة النفاذية (سحب دون إرجاع)

$$\tau_{\bar{x}} = \mu = 13600$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{600}{\sqrt{9}}\sqrt{\frac{6000-9}{6000-1}} = 199{,}87$$

ثانيا: حالة المعاينة غير نفاذية (سحب بالإرجاع)

$$\tau_{\bar{x}} = \mu = 13600$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{600}{\sqrt{9}} = \frac{600}{3} = 200$$

2 - هل يمكن إهمال معامل التصحيح ؟ ولماذا؟

نعم يمكن إهمال معامل التصحيح، لأن النتيجتين في الحالتين (سحب بإرجاع/سحب دون إرجاع) متقاربتين

$199{,}87 \approx 200$

كما أنه عند تطبيق القانون $\left(\frac{n}{N}=\frac{9}{6000}=0,0015\right)\prec 0,05$ نجد أننا في حالة المعاينة غير النفاذية (السحب بالإرجاع).

3 – عدد العينات التي يكون فيها $\bar{X}$ محصورا بين 13600 و13800

$$P(13600 \le \bar{x} \le 13800)$$
$$P\left(\frac{13600-13600}{200} \le \frac{\bar{x}-13600}{200} \le \frac{13800-13600}{200}\right) = P(0 \le \bar{z} \le 1) = \phi(1)-\phi(0) = 0,8413-0,5$$
$$P(13600 \le \bar{x} \le 13800) = 0,3413$$

لدينا 60 عينة أي:

$$0,3413.60 = 20,478 \approx 20$$

4 – عدد العينات التي يكون فيها $\bar{X}$ أقل من 13800

$$P(\bar{x} \le 13800)$$
$$P\left(\frac{\bar{x}-13600}{200} \le \frac{13800-13600}{200}\right) = P(\bar{z} \le 1) = \phi(1) = 0,8413$$
$$P(\bar{x} \le 13800) = 0,8413$$

لدينا 60 عينة أي:

$$0,8413.60 = 50,47 \approx 50$$

التمرين (01)

قدرت نسبة التلف بـــ 3% في مصنع لإنتاج الآلات الإلكترونية، تم أخد بطريقة عشوائية عينة قدرت بـــ 300 وحدة من هذا المصنع.

المطلوب:

1. أحسب المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة للنسب وانحرافها المعياري

التمرين (02)

إذا كان لدينا مجتمع إحصائي يتكون من المفردات التالية:

2,4,6,8

سحبت من هذا المجتمع عينات ذات الحجم $n = 2$

1 - أوجد معالم المجتمع؛

2 - أحسب عدد العينات الممكنة في حالة السحب بالإرجاع وحالة السحب دون إرجاع؛

3 - أحسب معالم مجتمع متغير توزيع المعاينة للمتوسطات في الحالتين؛

4 - أحسب معالم متغير توزيع المعاينة للتباين في الحالتين.

حل التمرين (01)

$f = P = 0,03$ ، $n = 300$.

- **حساب المتوسط الحسابي لمتغير توزيع المعاينة للنسب وانحرافها المعياري**

$$\tau_f = P = 0,03$$

نفرض أن المجتمع الإحصائي كبير، وبالتالي معاينة غير نفاذية، وبالتالي السحب بالإرجاع

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0,03(1-0,03)}{300}} = 0,0098$$

حل التمرين (02)

$x_i = 2,4,6,8$ ، $n = 2$

1 - حساب معالم المجتمع

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{2+4+6+8}{4} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{(2-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{5} = 2,236$$

2 - حساب عدد العينات الممكنة في حالة السحب بالإرجاع وحالة السحب دون إرجاع

حالة السحب بالإرجاع

$$k = N^n = 4^2 = 16$$

حالة السحب دون إرجاع

$$k = \frac{N!}{(N-n)!n!} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$

3 - أحسب معالم المجتمع لمتغير توزيع المعاينة للمتوسطات في الحالتين

- **حالة السحب بالإرجاع**

δ^2	$\bar{x}$	العينة	δ^2	$\bar{x}$	العينة
4	4	(6,2)	0	2	(2,2)
1	5	(6,4)	1	3	(2,4)
0	6	(6,6)	4	4	(2,6)
1	7	(6,8)	9	5	(2,8)

9	5	(8,2)	1	3	(4,2)
4	6	(8,4)	0	4	(4,4)
1	7	(8,6)	1	5	(4,6)
0	8	(8,8)	4	6	(4,8)
40	80	$\sum$			

- **المتوسط الحسابي**

$$\tau_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{k} = \frac{80}{16} = 5$$

للتأكد

$$\tau_{\bar{x}} = \mu = 5$$

- **التباين**

$$\sigma_{\bar{x}}^{\ 2} = \frac{\sum(\bar{x}_i - \tau_{\bar{x}})}{k} = \frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2}{16}$$

$$\frac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 (4-5)^2 + (5-5)^2 +}{16}$$

$$\frac{(6-5)^2 + (7-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 (7-5)^2 + (8-5)^2}{16} =$$

$$\frac{9+4+1+0+4+1+0+1+1+0+1+4+0+1+4+9}{16} = \frac{40}{16}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^{\ 2} = 2{,}5$$

- **الانحراف المعياري**

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58$$

للتأكد

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}236}{\sqrt{2}} = 1{,}57$$

- **حالة السحب دون إرجاع**

δ^2	$\bar{x}$	العينة
1	3	(2,4)
4	4	(2,6)
9	5	(2,8)

1	5	$(4,6)$
4	6	$(4,8)$
1	7	$(6,8)$
20	30	$\sum$

- المتوسط الحسابي

$$\tau_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i}{k} = \frac{30}{6} = 5$$

للتأكد

$$\tau_{\bar{x}} = \mu = 5$$

- التباين

$$\sigma_{\bar{x}}{}^2 = \frac{\sum(\bar{x}_i - \tau_{\bar{x}})}{k} = \frac{(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2}{6}$$

$$\frac{4+1+0+0+1+4}{6} = \frac{10}{6}$$

$$\sigma_{\bar{x}}{}^2 = 1{,}67$$

- الانحراف المعياري

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{1{,}67} = 1{,}29$$

للتأكد

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{2{,}236}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{4-2}{4-1}} = 1{,}29$$

4 – أحسب معالم متغير توزيع المعاينة للتباين في الحالتين

- حالة السحب بالإرجاع

- المتوسط الحسابي

$$\tau_{\delta^2} = \frac{\sum \delta^2{}_i}{k} = \frac{40}{16} = 2{,}5$$

للتأكد

$$\tau_{\delta^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) = 5\left(\frac{2-1}{2}\right) = 2{,}5$$

- التباين

$$\sigma_{\delta^2}{}^2=\frac{\sum(\delta^2{}_i-\tau_{\delta^2})}{k}=\frac{(0-2,5)^2+(1-2,5)^2+(4-2,5)^2+(9-2,5)^2}{16}$$
$$\frac{(1-2,5)^2+(0-2,5)^2+(1-2,5)^2+(4-2,5)^2+(4-2,5)^2+(1-2,5)^2+}{16}$$
$$\frac{(0-2,5)^2+(1-2,5)^2+(9-2,5)^2+(4-2,5)^2+(1-2,5)^2+(0-2,5)^2}{16}=$$
$$\frac{6,25+2,25+2,25+42,25+2,25+6,25+2,25+2,25+2,25+2,25+}{16}$$
$$\frac{6,25+2,25+42,25+2,25+2,25+6,25}{16}=\frac{132}{16}$$
$$\sigma_{\delta^2}{}^2=8,25$$

- **الانحراف المعياري**

$$\sigma_{\delta^2}=\sqrt{8,25}=2,87$$

- **حالة السحب دون إرجاع**
- **المتوسط الحسابي**

$$\tau_{\delta^2}=\frac{\sum\delta^2{}_i}{k}=\frac{20}{6}=3,33$$

للتأكد

$$\tau_{\delta^2}=\sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)=5\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{4}{4-1}\right)=3,33$$

- **التباين**

$$\sigma_{\delta^2}{}^2=\frac{\sum(\delta^2{}_i-\tau_{\delta^2})}{k}=\frac{(1-2,5)^2+(4-2,5)^2+(9-2,5)^2+(1-2,5)^2+(4-2,5)^2+(1-2,5)^2}{6}=$$
$$\frac{2,25+2,25+42,25+2,25+2,25+2,25}{6}=\frac{53,5}{6}$$
$$\sigma_{\delta^2}{}^2=8,916\approx 8,92$$

- **الانحراف المعياري**

$$\sigma_{\delta^2}=\sqrt{8,92}=2,986$$

التمرين (01)

أوجد قيم (U_α) التي تمثل مستوى ثقة قدره 90% باستعمال:

1- القانون الطبيعي العادي؛

2- قانون ستودنت بدرجة حرية $(V=4)$؛

3- قانون ستودنت بدرجة حرية $(V=30)$.

التمرين (02)

نختار عينة عشوائية متكونة من 36 تلميذ بدون إرجاع من قسم متكون من 72 تلميذ، فكان معدل الوزن لهذه العينة هو $\overline{X}=60$، وانحراف معياري لمجموع التلاميذ $\sigma=2$.

- أوجد مجال الثقة لمعدل وزن تلاميذ هذا القسم بمستوى ثقة قدره 90%.

التمرين (03)

نقوم بوزن 2500 بيضة فكان معدل الوزن هو 143غ والانحراف المعياري هو 20 غ،

- أوجد مجال الثقة لمعدل وزن البيض بمستوى ثقة يعادل 99%.

التمرين (04)

من مجتمع إحصائي طبيعي انحرافه المعياري $\sigma=1{,}6$، سحبت منه عينة عشوائية حجمها $n=5$، وكانت عناصر العينة كما يلي: 3، 7، 10، 8، 5.

- قدر مجال الثقة لمتوسط المجتمع بمستوى معنوية $\alpha=10\%$.

التمرين (05)

نريد معرفة نسبة السكر أثناء الصيام لمجتمع من الكهول، حيث يتبع القانون الطبيعي ذات المعدل $\mu=0{,}809$.

نأخذ عينة تتكون من 12 شخص ونقيس نسبة السكر لكل شخص، فنتحصل على النتائج التالية:

0,60- 0,90- 0,74- 0,96- 0,85- 1,05- 0,80- 0,93- 1,17- 0,70- 0,84- 0,75.

1- أوجد المعدل والانحراف المعياري لنسبة السكر أثناء الصيام لهذه العينة؛

2- أوجد مجال الثقة لمعدل نسبة السكر بمستوى ثقة قدره 90%.

التمرين (06)

يحاول باحث معرفة تركيز محلول كيميائي في دم بعض الأرانب، فأخذ عينة تتكون من 6 أرانب فتحصل على النتائج التالية:

51,2- 48,3- 50,8- 49,7- 53,6- 52,6.

1 أوجد معدل تركيز المحلول الكيميائي في دم الأرانب لهذه العينة؛

2 أوجد مجال الثقة لمعدل تركيز المحلول الكيميائي في دم الأرانب بمستوى ثقة قدره 95%.

حل التمرين (01)

ايجاد قيم (U_α) التي تمثل مستوى ثقة قدره 90% باستعمال:

1 - القانون الطبيعي العادي

لدينا ϕ الدالة التوزيعية للقانون العادي

$$\phi(\mu_\beta)=\frac{1+\beta}{2}=\frac{1+0{,}9}{2}=\frac{1{,}9}{2}=0{,}95$$

وقيمة μ_β تستخرج من جدول التوزيع العادي

$$\mu_\beta=1{,}64$$

2 - قانون ستودنت بدرجة حرية $(V=4)$

لدينا G الدالة التوزيعية لقانون ستودنت

$$\begin{cases} G(t_\beta)=\dfrac{1-\beta}{2}=\dfrac{1-0{,}9}{2}=\dfrac{0{,}1}{2}=0{,}05 \\ v=4 \end{cases}$$

وقيمة t_β تستخرج من جدول التوزيع العادي

$$t_\beta=2{,}132$$

3 - قانون ستودنت بدرجة حرية $(V=30)$

لدينا G الدالة التوزيعية لقانون ستودنت

$$\begin{cases} G(t_\beta)=\dfrac{1-\beta}{2}=\dfrac{1-0{,}9}{2}=\dfrac{0{,}1}{2}=0{,}05 \\ v=30 \end{cases}$$

وقيمة t_β تستخرج من جدول التوزيع العادي

$$t_\beta=1{,}697$$

حل التمرين (02)

$n=36$، سحب بدون إرجاع، $N=72$ ، $\overline{X}=60$ ، $\sigma=2$ ، $\beta=90\%=0{,}9$

- **إيجاد مجال الثقة لمعدل وزن تلاميذ هذا القسم بمستوى ثقة90%**

أولا: تحديد طبيعة التوزيع

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma=2$ معلوم، وحجم العينة كبير $30\succ(n=36)$ ، فإن:

$$\bar{z} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \to N(0,1)$$

$$\bar{x} = 60$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{2}{\sqrt{36}} \sqrt{\frac{72-36}{72-1}} = 0{,}237$$

ثانيا: تحديد قيمة μ_β

لدينا ϕ الدالة التوزيعية للقانون العادي

$$\phi(\mu_\beta) = \frac{1+\beta}{2} = \frac{1+0{,}9}{2} = \frac{1{,}9}{2} = 0{,}95$$

وقيمة μ_β تستخرج من جدول التوزيع العادي

$$\mu_\beta = 1{,}64$$

ثالثا: تحديد مجال الثقة للمعدل μ

$$\mu \in \left]\bar{x} \pm \mu_\beta \sigma_{\bar{x}}\right[$$

$$\mu \in \left]60 \pm (1{,}64.2{,}237)\right[$$

$$\mu \in \left]59{,}61 - 60{,}39\right[$$

حل التمرين (03)

$\beta = 99\%$ ، $\delta = 20$ ، $\bar{x} = 143$ ، $n = 2500$

- **إيجاد مجال الثقة لمعدل وزن البيض بمستوى ثقة يعادل99%**

أولا: تحديد طبيعة التوزيع

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، وحجم العينة كبير $30 \succ (n = 2500)$ ، فإن:

$$\bar{z} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \to N(0,1)$$

$$\bar{x} = 143$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع σ مجهول، نعوضه بالتقدير المواظب دون تحيز δ :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n-1}} = \frac{20}{\sqrt{2500-1}} = 0{,}4$$

ثانيا: تحديد قيمة μ_β

لدينا ϕ الدالة التوزيعية للقانون العادي

$$\phi(\mu_\beta) = \frac{1+\beta}{2} = \frac{1+0{,}99}{2} = \frac{1{,}99}{2} = 0{,}995$$

وقيمة μ_β تستخرج من جدول التوزيع العادي

$$\mu_\beta = 2,57$$

ثالثا: تحديد مجال الثقة للمعدل μ

$$\mu \in \left]\bar{x} \pm \mu_\beta \sigma_{\bar{x}}\right[$$
$$\mu \in \left]143 \pm (2,57.0,4)\right[$$
$$\mu \in \left]141,97 - 144,03\right[$$

حل التمرين (04)

$\sigma = 1,6$ ، $n = 5$ ، x_i: 5 ،8 ،10 ،7 ،3 ، $\alpha = 10\% \Rightarrow \beta = 90\%$

- **تقدير مجال الثقة لمتوسط المجتمع بمستوى معنوية** $\alpha = 10\%$

أولا: تحديد طبيعة التوزيع

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 1,6$ معلوم، وحجم العينة كبير $(n = 5) \prec 30$ ، فإن:

$$\bar{z} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \rightarrow N(0,1)$$
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{5 + 8 + 10 + 7 + 3}{5} = 6,6$$
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,6}{\sqrt{5}} = 0,715$$

ثانيا: تحديد قيمة μ_β

لدينا ϕ الدالة التوزيعية للقانون العادي

$$\phi(\mu_\beta) = \frac{1 + \beta}{2} = \frac{1 + 0,9}{2} = \frac{1,9}{2} = 0,95$$

وقيمة μ_β تستخرج من جدول التوزيع العادي

$$\mu_\beta = 1,64$$

ثالثا: تحديد مجال الثقة للمعدل μ

$$\mu \in \left]\bar{x} \pm \mu_\beta \sigma_{\bar{x}}\right[$$
$$\mu \in \left]6,6 \pm (1,64.0,715)\right[$$
$$\mu \in \left]5,42 - 7,78\right[$$

حل التمرين (05)

$x_i \rightarrow N(\mu, \sigma)$ ، $\mu = 0,809$ ، $n = 12$

0,84 -0,70 -1,17 -0,93 -0,80 -1,05 -0,85 -0,96 -0,74 -0,90 -0,60
.0,75

1 إيجاد المعدل والانحراف المعياري لنسبة السكر أثناء الصيام لهذه العينة

$$\mu = 0{,}809$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{0{,}84 + 0{,}70 + 1{,}17 + 0{,}93 + 0{,}80 + 1{,}05 + 0{,}85 + 0{,}96 + 0{,}74 + 0{,}90 + 0{,}60 + 0{,}75}{12} = 0{,}86$$

$$\delta^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(0{,}84 - 0{,}86)^2 + (0{,}70 - 0{,}86)^2 + (1{,}17 - 0{,}86)^2 + (0{,}93 - 0{,}86)^2 +}{12}$$

$$\frac{(0{,}80 - 0{,}86)^2 + (1{,}05 - 0{,}86)^2 + (0{,}85 - 0{,}86)^2 + (0{,}96 - 0{,}86)^2 +}{12}$$

$$\frac{(0{,}74 - 0{,}86)^2 + (0{,}90 - 0{,}86)^2 + (0{,}60 - 0{,}86)^2 + (0{,}75 - 0{,}86)^2 +}{12}$$

$$\delta^2 = 0{,}0227$$

$$\delta = 0{,}15$$

2 إيجاد مجال الثقة لمعدل نسبة السكر بمستوى ثقة قدره 90%

أولا: تحديد طبيعة التوزيع

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، وحجم العينة صغير $30 \succ (n = 12)$، فإن:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \to t_v \\ v = n - 1 \end{cases}$$

$$\bar{x} = 0{,}86$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع σ مجهول، نعوضه بالتقدير المواظب دون تحيز δ :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n-1}} = \frac{0{,}15}{\sqrt{12-1}} = 0{,}045$$

ثانيا: تحديد قيمة t_β

لدينا G الدالة التوزيعية لقانون ستودنت

$$G(t_\beta) = \frac{1-\beta}{2} = \frac{1-0{,}90}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$$

$$v = 12 - 1 = 11$$

وقيمة t_β تستخرج من جدول توزيع ستودنت

$$t_\beta = 1{,}796$$

ثالثا: تحديد مجال الثقة للمعدل μ

$$\mu \in \left]\bar{x} \pm t_{\beta}\sigma_{\bar{x}}\right[$$
$$\mu \in \left]0{,}86 \pm (1{,}796.0{,}045)\right[$$
$$\mu \in \left]0{,}777 - 0{,}943\right[$$

حل التمرين (06)

$n = 6$:

.52,6 -53,6 -49,7 -50,8 -48,3 -51,2

1 إيجاد معدل تركيز المحلول الكيميائي في دم الأرانب لهذه العينة

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{52{,}6 + 53{,}6 + 49{,}7 + 50{,}8 + 48{,}3 + 51{,}2}{6} = 51{,}03$$

2 إيجاد مجال الثقة لمعدل تركيز المحلول الكيميائي في دم الأرانب بمستوى ثقة قدره95%

أولا: تحديد طبيعة التوزيع

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع مجهول، وحجم العينة صغير $30 \succ (n = 12)$، فإن:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \rightarrow t_v \\ v = n - 1 \end{cases}$$
$$\bar{x} = 51{,}03$$
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بما أن الانحراف المعياري للمجتمع σ مجهول، نعوضه بالتقدير المواظب المتحيز $\hat{\delta}$:

$$\hat{\delta}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(52{,}6 - 51{,}03)^2 + (53{,}6 - 51{,}03)^2 + (49{,}7 - 51{,}03)^2 + (50{,}8 - 51{,}03)^2 +}{5}$$
$$\frac{(48{,}3 - 51{,}03)^2 + (51{,}2 - 51{,}03)^2}{5}$$
$$\delta^2 = 3{,}67$$
$$\delta = 1{,}92$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\hat{\delta}}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}92}{\sqrt{6}} = 0{,}78$$

ثانيا: تحديد قيمة t_{β}

لدينا G الدالة التوزيعية لقانون ستودنت

$$G(t_{\beta}) = \frac{1-\beta}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$$
$$v = 6 - 1 = 5$$

وقيمة t_{β} تستخرج من جدول توزيع ستودنت

$$t_\beta = 2,571$$

ثالثا: تحديد مجال الثقة للمعدل μ

$$\mu \in \left]\bar{x} \pm t_\beta \sigma_{\bar{x}}\right[$$
$$\mu \in \left]51,03 \pm (2,571.1,92)\right[$$
$$\mu \in \left]49,02 - 53,03\right[$$