المحور الثالث: الفائدة المركبة

I - تعريف الفائدة المركبة:

تعرف الفائدة المركبة على أنها الفائدة المستحقة الناتجة في نهاية وحدة زمنية والتي تضاف إلى رأس المال الموظف لتشكل معا رأس مال جديد للوحدة الزمنية الموالية "وتسمى رسملة الفوائد" ويتم تطبيق هذه العملية عادة عندما يتجاوز الاستثمار سنة واحدة، وعليه فهي تحسب على أساس رصيد بداية كل دورة من دورات مدة التوظيف

- الصيغة العامة لحساب الفائدة المركبة:

إذا قام شخص بتوظيف مبلغ مالي قدره (C_0) بمعدل فائدة مركبة (t) ولمدة (n) من السنوات فإن تطور رصيد هذا الشخص خلال مدة التوظيف يكون كما يلي:

n	المبلغ الأصلي C_0	الفائدة	الجملة المكتسبة
1	C_0	$I_1 = C_0 . t$	$V_1 = C_0 + I_1 = C_0 + C_0 t = C_0(1+t)$
2	$C_0(1+t)$	$I_2 = C_0(1+t) . t$	$V_2 = C_0(1+t) + C_0(1+t).t = C_0(1+t).(1+t) = C_0(1+t)^2$
3	$C_0(1+t)^2$	$I_3 = C_0(1+t)^2 . t$	$V_3 = C_0(1+t)^2 + C_0(1+t)^2 . t = C_0(1+t)^2 . (1+t) = C_0[1+t]^3$
⋮			
n	$C_0(1+t)^{n-1}$	$I_n = C_0(1+t)^{n-1} . t$	$V_n = C_0(1+t)^n$

من خلال الجدول أعلاه يمكن كتابة الصيغة العامة لحساب الجملة المكتسبة لفائدة مركبة في نهاية مدة التوظيف وفق الشكل الموالي:

$$V_n = C_0 (1+t)^n$$

من خلال هذه الصيغة يمكن استنتاج صيغة الفائدة المركبة عند نهاية مدة التوظيف بالطريقة التالية:

$$I = V_n - C_0 = C_0(1+t)^n - C_0$$

$$I = C_0[(1+t)^n - 1]$$

ص 4

مثال: قام شخص لتوظيف مبلغ مالي قدره 150000 لمدة 03 سنوات

المطلوب: احسب الفائدة الناتجة عن توظيف هذا المبلغ بمعدل فائدة مركبة يساوي 10%

احسب الجملة المكتسبة (V_n) لهذا المبلغ اذا كان معدل الفائدة المركبة هو 12%

الحل:

حساب الفائدة بمعدل 10%

$$I = C_0\left[(1+t)^n - 1\right] = 150000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$\boxed{I = 49650}$$

حساب الجملة المكتسبة (V_n) اذا كان $t=12\%$

$$V_n = C_0(1+t)^n = 150000(1,12)^3 = 210739,2$$

حساب مختلف العناصر الجملة المكتسبة:

1- ايجاد قيمة المبلغ الاصلي الموظف: C_0:

من خلال الصيغة العامة للجملة المكتسبة يمكن ايجاد قيمة (C_0) اصل الموظف

$$V_n = C_0(1+t)^n \Rightarrow \boxed{C_0 = \frac{V_n}{(1+t)^n}}$$

2 حساب مدة التوظيف: n:

من صيغة الجملة المكتسبة يمكن استنتاج ~~مدة~~ مدة التوظيف اللازمة للحصول على هذه الجملة وذلك كمايلي:

$$V_n = C_0(1+t)^n \Rightarrow (1+t)^n = \frac{V_n}{C_0}$$

وبادخال اللوغريتم النبيري على طرفي المساواة نجد:

$$\ln\left(\frac{V_n}{C_0}\right) = \ln\left[(1+t)^n\right]$$

$$= n \cdot \ln(1+t) \Rightarrow \boxed{n = \frac{\ln\left(\frac{V_n}{C_0}\right)}{\ln(1+t)}}$$

حساب معدل التوظيف

من خلال الجملة المكتسبة نحسب ابتداءً معدل التوظيف بتطبيق الآتي:

$$V_n = C_0(1+r)^n \Rightarrow (1+r)^n = \frac{V_n}{C_0}$$

$$\Rightarrow (1+r) = \left(\frac{V_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{V_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

مثال:

1- يريد شخص تسديد قرض بعد ثلاث سنوات قيمته 665500 . ما هو المبلغ الواجب توظيفه الآن بمعدل 10% حتى يتمكن هذا الشخص من تسديد هذا المبلغ.

2- ما هي المدة اللازمة لتوظيف نصف المبلغ الموظف من قبل هذا الشخص حتى تكون الجملة المكتسبة 366025

3- إذا كانت Vn للمبلغ الثاني هي 313600 في ثلاث سنوات من توظيفه لنصف المدة "المطلوب الثاني" . ما هو معدل الفائدة المطبق في هذه الحالة:

الحل

1) حساب C_0:

$n = 3$ ans , $r = 10\%$, $V_n = 665500$

$$C_0 = \frac{V_n}{(1+r)^n} = \frac{665500}{(1+0{,}1)^3} = 500000$$

2) حساب مدة التوظيف n:

$V_n = 366.025$, $C_0 = \frac{500000}{2} = 250000$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{V_n}{C_0}\right)}{\ln(1+r)}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{366025}{250000}\right)}{(1{,}1)} = 4 \text{ سنوات}$$

3) حساب معدل الفائدة r:

$V_n = 313.600$

$C_0 = 250000$

$n = \frac{4}{2} = 2$ سنة

$$r = \left(\frac{V_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$= \left(\frac{313.600}{250.000}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$r = 12\%$$

حساب الفائدة المركبة في حالة مدة التوظيف عدد غير صحيح

إذا كانت مدة التوظيف عدد غير صحيح فهناك وجهتا نظر في كيفية حساب جملة الفائدة المركبة:

1- طريقة التجارية:

حسب هذه الطريقة نحسب جملة الفائدة المركبة انطلاقا من الصيغة:

$$I_c = C_0\left[(1+r)^{n'} - 1\right]$$

حيث: n': يمثل السنين

$n' <$ n_1: يمثل الجزء الصحيح من مدة التوظيف — n_2: يمثل الجزء العشري من مدة التوظيف

كما أن الجملة المكتسبة تحسب أيضا:

$$V_c = C_0(1+r)^{n'}$$

مثال:

وظف شخص مبلغ من المال 125000 بمعدل فائدة مركبة 5% لمدة 3 سنوات و 6 أشهر

المطلوب: أوجد قيمة كل من I_c و V_c

الحل:

$n = 3,5$ سنة، $r = 5\%$، $C = 125000$، $I_c = C_0\left[(1+r)^{n'} - 1\right]$

$$I_c = 125000\left[(1{,}05)^{3,5} - 1\right] = 23276,58$$

حساب V_c:

$$V_c = C_0(1+r)^{n'} = 125000(1{,}05)^{3,5} = 148276,58$$

2. الطريقة العقلانية (الحقيقية)

حسب هذه الطريقة فإنه ينظر إلى عمليات التوظيف على أنها عمليتين مركبتين من عمليتين جزئيتين:

* العملية الجزئية I : وهي عملية مالية طويلة الأجل تتعلق بالجزء الصحيح من مدة التوظيف، وهنا يطبق عليها قانون الفائدة المركبة.

* العملية الجزئية II : وهي عملية مالية قصيرة الأجل وتتعلق بالجزء العشري من مدة التوظيف وهنا يتم تطبيق عليها قانون الفائدة البسيطة

ومن خلال هذه الطريقة يتم حساب الفائدة المركبة حسب القانون الآتي:

~~$I_r = [C_0(1+r)^{n_1} \ldots]$~~

$$I_r = C_0\left[(1+r)^{n_1}-1\right] + C_0(1+r)^{n_1}\cdot r\cdot n_2$$

أما الجملة المكتسبة حسب هذه الطريقة فهي:

$$V_r = C_0(1+r)^{n_1}\left[1+r\cdot n_2\right]$$

مثال: $C = 125000$, $r = 5\%$, $n = 3,6$

من خلال معطيات المثال (1) لنا احسب كل من I_r , V_r

$$I_r = C_0\{(1+r)^{n_1}-1\} + C_0(1+r)^{n_1}\cdot r\cdot n_2$$

$$= 125000\{(1,05)^3-1\} + 125000(1,05)^3\cdot 0,05\cdot 0,6$$

$$= 19703,125 + 3617,58 = 23320,703$$

حساب V_r:

$$V_r = C_0(1+r)^{n_1}\{1+r\cdot n_2\}$$

$$= 125000(1,05)^3\cdot\{1+0,05\cdot 0,6\}$$

$$144703,125\cdot 1,025 = 148320,703$$

مثال 2:

تم توظيف مبلغ مالي (C_0) لمدة ل (t) لمدة
سنة و 9 أشهر كانت الفائدة المركبة التجارية
بالطريقة التجارية $Ir = 19629$ أما إذا تم
توظيف ضعف المبلغ (C_0) بنفس المعدل و لمدة
سنة و 6 أشهر وبنفس الطريقة التجارية
فينتج فائدة قدرها $Ir = 33372$

المطلوب: أوجد معدل الفائدة t للتوظيف والمبلغين الماليين
احسب الفائدة التجارية الناتجة عن توظيف المبلغين

الحل:

$$Ir = C_0\left[(1+t)^{n_1} - 1\right] + C_0(1+t)^{n_1}\cdot t\cdot n_2$$

$$Ir_1 = C_1\left[(1+t)^{n_1} - 1\right] + C_1(1+t)^{n_1}\cdot t\cdot n_2$$

$$19629 = C_1\left[(1+t)^{1} - 1\right] + C_1(1+t)^{1}\cdot t\cdot 0.75 \quad (1)$$

$$Ir_2 = C_2\left[(1+t)^{n_1} - 1\right] + C_2(1+t)^{n_1}\cdot t\cdot n_2$$

$$33372 = C_2\left[(1+t)^{1} - 1\right] + C_2(1+t)^{1}\cdot t\cdot 0.5 \quad (2)$$

نعلم أن $C_2 = 2C_1$ بالتعويض في العلاقة نجد $\frac{(2)}{(1)}$:

$$\frac{33372}{19629} = \frac{C_1\left[2((1+t)^1 - 1) + (1+t)^1\cdot t\right]}{C_1\left[((1+t)^1 - 1) + (1+t)^1\cdot t\cdot 0.75\right]}$$

$$\frac{33372}{19629} = \frac{t^2 + 3t}{0.75t^2 + 1.75t}$$

بضرب الطرفين في الوسطين نجد:

$$5400t^2 - 486t = 0 \Rightarrow t\cdot(5400t - 486)$$

$t = 0$ مرفوض

(7)

وعليه : $5400t - 486 = 0 \Rightarrow t = \frac{486}{5400}$

$\Rightarrow t = 9\%$

حساب المبلغين الأصليين :

لدينا : $19629 = C_1\{(1+0,09)^1 + 1\} + C_1(1+0,09)^1 \cdot 0,09 \cdot 0,75$

$19629 = 0,163575\ C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{19629}{0,163575} = 12.000$

$2C_1 = C_2 \Rightarrow C_2 = 24.000$

II- القيمة الحالية لرأس مال مستقبلي :

التحيين أو الحالية في عملية عكسية للرسملة

فالرسملة للمبالغ ما في تحديد وحساب مجمع القيم المستقبلية لتلك المبالغ أي الجملة المكتنزة !! صناعة فوائد إلى المبالغ الأصلي ، أما الحالية فهي تعني تحديد القيمة الحالية لمجموع مبالغ يستحق في المستقبل أي أن الفوائد تطرح من تلك المبالغ المستقبلي :

وتعطى القيمة الحالية بالقانون التالي :

$$C_0 = \frac{V_n}{(1+t)^n} \Rightarrow C_0 = V_n \cdot (1+t)^{-n}$$

مثال :

أراد شخص معرفة أصل المبلغ الذي أودعه في البنك بعد أن وضعه لمدة 4 سنوات ، حيث كان رصيد هذا المبالغ بعد هذه المدة هو : 26.23 509,375 علما أن معدل الفائدة المركبة هو 7,5 %

المطلوب : أحسب أصل هذا المبالغ

أحسب نظرا يقتضي المبلغ المسدد قبل نهاية عقد التوظيف ، البنك هش

الحل : حساب أصل المبلغ : $V_n = 2623509,375$

لدينا : $n = 4$ ، $r = 15$

$$C_0 = V_n(1+r)^{-n} = 2623509,375\,(1,15)^{-4}$$

$$C_0 = 1500000$$

حساب المبلغ المسدد قبل السنة من نهاية العقد ،

بطريقتين :

1) $C_0 = V_n(1+r)^{-n} = 2623509,375\,(1,15)^{-1}$

$$C_0 = 2281312,5$$

2) $V_n = C_0(1+r)^n$

$$V_n = 1500000\,(1,15)^3 = 2281312,5$$