المحاضرة رقم 04:

الدفعات:

I- تعريف: تعرف الدفعات على انها مجموعة من التسديدات من الاموال او تلك المبالغ المالية المدفوعة لتسديد قرض معين على فترات زمنية ثابتة من حيث العامل الزمني.

- انواع الدفعات: تقسم الدفعات وفق مجموعة من المعايير نذكر منها:

* دفعات على اساس احتمال الدفع: وهي تنقسم الى دفعات:
1- دفعات مؤكدة: مثل دفعات تسديد القروض
2- دفعات محتملة: مثل دفعات تسديد معاشات

* دفعات على اساس مدة سدادها: وهي تنقسم الى:
1- دفعات دائمة: مثل ريع الاراضي الزراعية
2- دفعات مؤقتة: مثل الايجار، البيع بالتقسيط

* دفعات حسب سريان عملية الدفع، وتقسيم الى:
1- دفعات معجلة "الفورية": مثل دفع الايجار السنوي حيث يدفع في بداية كل فترة من السنة.
2- دفعات عادية: مثل دفع الايجار الشهري في آخر الشهر
3- الدفعات المؤجلة: وهي التي يستحق دفعها بعد فترة زمنية معينة مثل حالات تسديد قروض في بعض الاستثمار

* دفعات حسب معيار قيمة الدفعة
1- دفعات ثابتة: وهي التي تكون فيها ثابتة ومتساوية ابتداء من اول دفعة
2- دفعات متغيرة: وهي التي تكون مبالغها غير متساوية ومعا" الدفعات متغيرة بانتظام: او دفعات عشوائية)

II- الصيغة العامة لجملة مجموع الدفعات العادية "الثابتة":

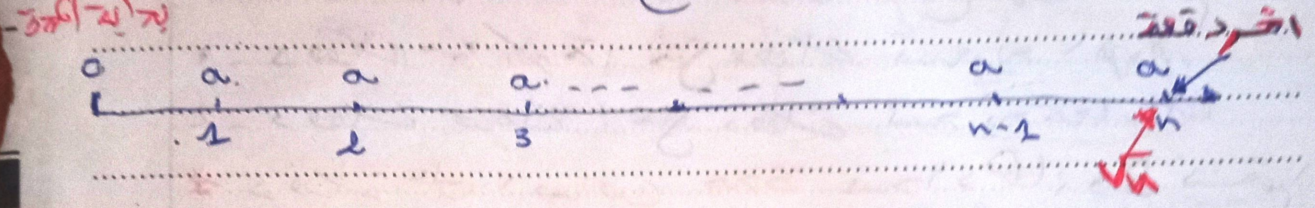
نحتاج لسلسلة الدفعات بالاعتماد على:
1- تاريخ اول دفعة او تسديد
2- الفترة التي تفصل بين دفعتين متتاليتين
3- عدد الدفعات. 4- مبلغ كل دفعة.

Scan with Balayage rapide

الجملة الجملية لسلسلة دفعات آخر مدة:

لنفترض أن شخصا يسدد دينا بواسطة دفعات سنوية لطالبيه ثابتة القيمة قيمة كل دفعة هي (a) وعدد الدفعات (n) ومعدل الفائدة المركبة هو على كل دفعة (t)

من أجل حساب مجموع ما يسدده هذا الشخص أو الجملة نقوم بحساب جملة كل دفعة مع الأخذ بعين الاعتبار الدفعة التي تسدد في نهاية المدة وعليه يكون مجموع جملة هذه الدفعات هي عبارة عن جملة هذه الدفعات وهو ما نحددها حتى نهاية جميع الدفعات



من أجل حساب جملة الدفعات آخر مدة وانطلاقا من العلاقة الأساسية لحساب هذه الجملة يجب علينا حساب جملة كل دفعة.

ترتيب الدفعة	أوقات التسديد	المدة الأساسية التي تسدد عنها الدفعة (n)	الجملة المحصلة لكل دفعة
1	1	فترة (n-1)	$a + \dots = a(1+t)^{n-1}$
2	2	الفترة (n-2)	$a(1+t)^{n-2}$
3		الفترة (n-3)	$a(1+t)^{n-3}$
⋮	⋮		
n-2	n-2	الفترة 2	$a(1+t)^{2}$
n-1	n-1	الفترة 1	$a(1+t)^{1}$
n	n	الفترة 0	$a(1+t)^{0} = a$
			Vn

من خلال الجدول أعلاه فإن الجملة المحصلة لكل الدفعات عند نهاية المدة نحصل عليها على الشكل التالي:

$$V_n = a + a(1+t) + a(1+t)^2 + \dots + a(1+t)^{n-1}$$

$$= a\left[1 + (1+t) + (1+t)^2 + \dots + (1+t)^{n-1}\right]$$

(3)

نلاحظ ان الجملة تمثل متتالية هندسية لعناصرها حدها الاول (a) وعدد حدها هو (n) واساسها (1+t)

ومجموع متتالية هندسية يعبر عنه بالعلاقة:

$$S = a \cdot \frac{R^n - 1}{R - 1}$$

حيث:

a: الحد الاول

R: هو اساس المتتالية.

وعليه جملة الدفعات متساوية في نهاية المدة يعبر عنها:

$$V_n = a \cdot \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1} = \boxed{a \cdot \frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

مثال: يسدد شخص دينا على خمس دفعات متساوية في نهاية المدة فاذا كانت قيمة كل دفعة هي 1000 دج

اوجد الجملة المحصل عليها في نهاية المدة اذا كان معدل الفائدة هو 5%

الحل:

$V_n = ?$, $n = 5$, $t = 5\%$, $a = 1000$ DA

$$V_5 = a \cdot \frac{(1+t)^n - 1}{t} \Rightarrow V_5 = a \cdot \frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05} = 5525{,}231 \text{ DA}$$

III. حساب عناصر جملة دفعات ثابتة اخر المدة

1- حساب قيمة الدفعة (a): من العلاقة السابقة الخاصة بجملة دفعات اخر المدة يمكن استنتاج علاقة لحساب الدفعة

$$V_n = a \cdot \frac{(1+t)^n - 1}{t} \Rightarrow \boxed{a = \frac{V_n \cdot t}{(1+t)^n - 1}}$$

مثال: بلغت جملة دفعات متساوية اخر المدة 6140,108

اذا علمت ان عدد الدفعات هو 07 ومعدل الفائدة هو 8%

اوجد قيمة الدفعة؟

$V_n = 446140,168$. $n = 7$ $t = 8\%$ (4) الحل: لدينا:

$$a = \frac{V_n \cdot t}{(1+t)^n - 1} = 446140,168 \cdot \frac{0,08}{(1,08)^7 - 1} = 50000 \text{ DA}$$

2- حساب عدد الدفعات (n): من العلاقة السابقة أيضا الخاصة بالجملة المحصلة لدفعات يمكننا إيجاد عدد الدفعات كما يلي:

$$V_n = a \cdot \frac{(1+t)^n - 1}{t} \Rightarrow \frac{V_n \cdot t}{a} = (1+t)^n - 1$$

$$\Rightarrow (1+t)^n = \frac{V_n \cdot t}{a} + 1$$

$$\Rightarrow n \cdot \ln(1+t) = \ln\left(\frac{V_n \cdot t}{a} + 1\right)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{V_n \cdot t}{a} + 1\right)}{\ln(1+t)}$$

3. حساب معدل الفائدة المطبق (t):

من خلال العلاقة السابقة الخاصة بجملة الدفعات يمكننا إيجاد معدل الفائدة المطبق كما يلي:

$$V_n = a \cdot \frac{(1+t)^n - 1}{t} \Rightarrow \frac{(1+t)^n - 1}{t} = \frac{V_n}{a}$$

ثم:

من خلال الجدول رقم 03 [illegible] وفقا لنتيجة القسمة الناتجة عن حاصل القسمة الجملة على الدفعة نجد معدل الفائدة

أو

ثم:

لو وضع: $\frac{V_n}{a} \to t'$

$\frac{(1+t_i)^n - 1}{t_i} \to y_i$

لنفرض معدلين هما: t_1 ، t_2 حيث $t_1 < t' < t_2$

$$t_1 \rightarrow \frac{(1+t_1)^n - 1}{t_1} = y_1$$

$$t' \rightarrow \frac{V_n}{a}$$

$$t_2 \rightarrow \frac{(1+t_2)^n - 1}{t_2} = y_2$$

$$t' - t_1 = \frac{V_n}{a} - y_1 \Rightarrow \Delta t = \Delta y$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta y} = 1 \quad \text{—— (1)}$$

$$t_2 - t_1 = y_2 - y_1 \Rightarrow \frac{t_2 - t_1}{y_2 - y_1} = 1 \quad \text{—— (2)}$$

من خلال العلاقتين (1) ، (2) نجد:

$$\frac{\Delta t}{\Delta y} = \frac{t_2 - t_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta y \cdot (t_2 - t_1)}{y_2 - y_1}$$

$$\Rightarrow t - t_1 = \frac{\Delta y \cdot (t_2 - t_1)}{y_2 - y_1}$$

$$\Rightarrow t = t_1 + \frac{\Delta y \cdot (t_2 - t_1)}{y_2 - y_1}$$

مثال 1: تحصلت على قرض مسدد من طرف بنك تحصل هذا الأخير على دفعات متساوية لهذا بـ مدة نصف 360000 دج ن الدفعة

فإذا بلغت (Vn) لهذا بنهاية الدفعة [illegible] 1670760 دج

اوجد مدة تحصيل هذا القرض علما أن معدل الفائدة 8 10٪ سنويا.

الحل:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{V_n}{a} + 1\right)}{\ln(1+t)} \Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{1670760}{360000} + 1\right)}{\ln(1,1)} \approx 4 \text{ ans}$$

مثال 2: من شهر يناير من سنة ما - قام الشخص بدفع 18 دفعة متساوية. انتهائية، قيمة كل دفعة 5000 دج. أعطت جملة لجميع الدفعات قدرها 200000,0 دج. حدد معدل الفائدة السنوية.

الحل: $a = 5000$ ، $n = 18$ ، $V_n = 200000$ ، $r = ?$

لدينا:

$$\frac{V_n}{a} = \frac{200000}{5000} = 40 \rightarrow r$$

- إذا كان $r_1 = 8{,}5\%$

$$y_1 = \frac{(1+r_1)^n - 1}{r_1} = \frac{(1+0{,}085)^{18} - 1}{0{,}085} = 39{,}322995 \rightarrow r_1$$

إذا كان $r_2 = 9\%$

$$y_2 = \frac{(1+r_2)^n - 1}{r_2} = \frac{(1+0{,}09)^{18} - 1}{0{,}09} = 41{,}301337 \rightarrow r_2$$

وعليه نحسب r كما يلي:

$$r = r_1 + \frac{(40 - 39{,}322995)(0{,}09 - 0{,}085)}{41{,}301337 - 39{,}322995} = 0{,}0867110 \simeq 8{,}67\% = r$$

IV جملة الدفعات لدفعات ثابتة غير السنوية:

مثال: احسب الجملة المحصلة لسلسلة دفعات شهرية قدرها 84 دفعة بمعدل سنوي 10% وقيمة كل دفعة 2000 دج

الحل: هنا أن الدفعات شهرية وهنا يجب المساواة بين المدة والمعدل، وعليه نستخدم معدل تكافئي للمعدل السنوي الشهري

$$(1+r) = (1+r_{12})^{12} \Rightarrow (1{,}1) = (1+r_{12})^{12}$$

$$\Rightarrow (1{,}1)^{\frac{1}{12}} = (1+r_{12}) \Rightarrow r_{12} = (1{,}1)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}007974$$

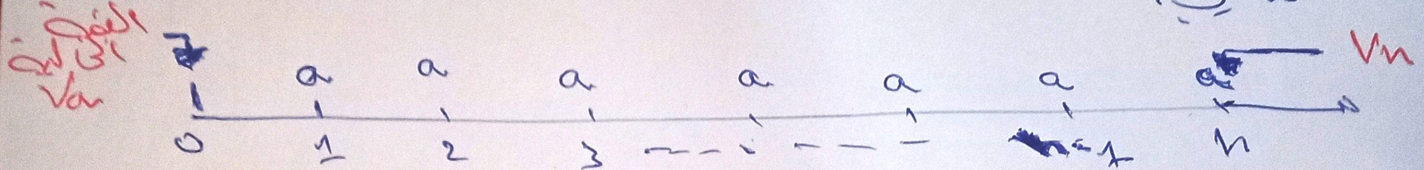
إذن:

$$V_{84} = 2000 \cdot \frac{(1{,}007974)^{84} - 1}{0{,}007974} = 237949{,}63 \text{ DA}$$

١/ القيمة الحالية لسلسلة دفعات ثابتة لآخر المدة

نقصد بالقيمة الحالية للدفعات الثابتة آخر المدة قيمتها في بداية المدة على أساس معدل خصم معين، والتي نحسبها من خلال إيجاد القيمة الحالية لكل دفعة من الدفعات على حدا في بداية المدة ثم نجمعها فنحصل على القيمة الحالية للدفعات

بافتراض أن لدينا n دفعة لآخر المدة و t معدل الفائدة المركبة. فالقيمة الحالية لكل دفعة تحسب كما يلي:



من خلال الشكل نحسب إيجاد القيمة الحالية للدفعات كما يلي:

$$Va = a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + a(1+t)^{-3} \cdots a(1+t)^{-(n-1)} + a(1+t)^{-n}$$

$$Va = a\left[(1+t)^{-1} + (1+t)^{-2} + \cdots + (1+t)^{-n}\right]$$

من خلال العلاقة الأخيرة نلاحظ أن المجموع يشكل متتالية هندسية أساسها $(1+t)$ وحدها الأول $a(1+t)^{-n}$ وعدد حدودها n

ومجموع متتالية الهندسية من حدها الأول a، وأساسها R هو: $S = a \cdot \frac{R^n - 1}{R - 1}$

وعليه نجد القيمة الحالية لمجموع الدفعات ثابتة آخر المدة حسب العلاقة التالية:

$$Va = a(1+t)^{-n} \cdot \frac{(1+t)^{n} - 1}{(1+t) - 1} = a \cdot \frac{1 - (1+t)^{-n}}{t} = Va$$

: احسب القيمة الحالية لسلسلة ذات دفعة ثابتة.
سنوية لدفعات عددها 15 قيمة كل واحدة هي 1000 د بمعدل
خصم 8%

الحل:

$n = 15$ - $a = 1000$ - $t = 8\%$, $V_a = ?$

$$V_a = 1000 \cdot \frac{1-(1,08)^{-15}}{0,08} = 8559,48.$$