التوزيع الطبيعي La loi normale

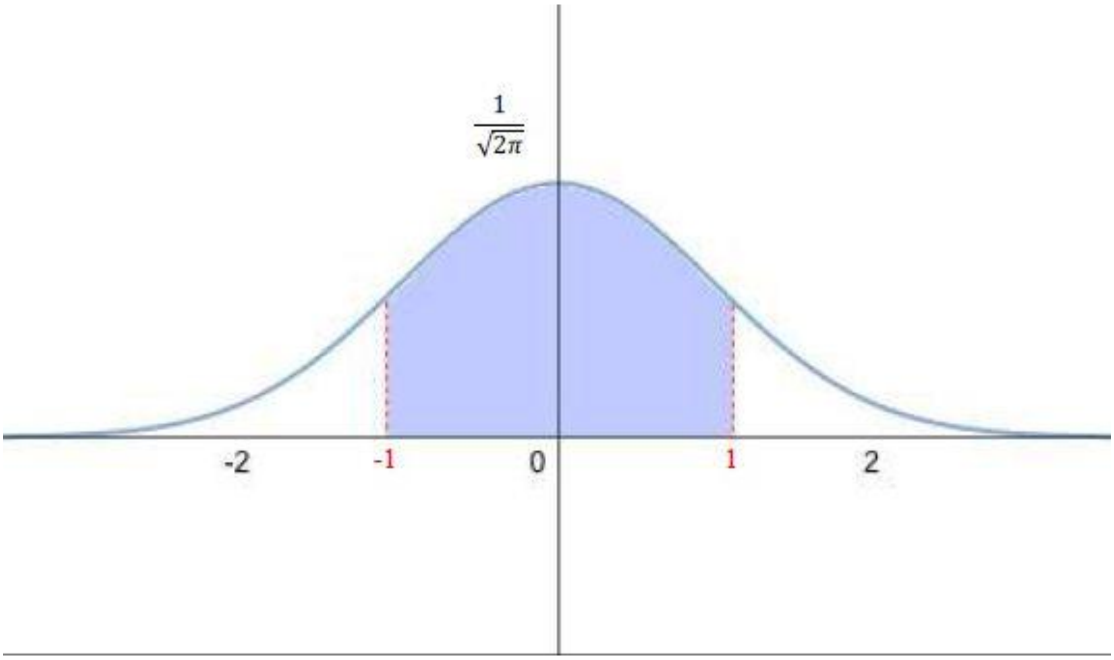
يعتبر التوزيع الطبيعي احد أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة استخداما في الإحصاء نتيجة لنظرية النهاية المركزية ، و يعتبر التوزيع الطبيعي أساسا لنمذجة عدة ظواهر اقتصادية و اجتماعية، اذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي فان دالة كثافته الاحتمالية تكتب على النحو التالي :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

و نكتب في هذه الحالة أن

$$X \sim N\ (\mu\ ,\sigma\ ) \qquad avec\ ,\sigma > 0$$

μ : عبار عن الوسط الحسابي للتوزيع و σ الانحراف المعياري للتوزيع



مجال قيم متغير عشوائي طبيعي Plage de normalité

البرهان : ليكن X متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي μ و انحرافه المعياري σ حيث $X \sim N\ (\mu\ ,\sigma\ )$

نعرف المتغير المعشوائي Z حيث $Z \sim N\ (0\ ,1\ )$ في هذه الحالة يمكن كتابة

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad , \ avec\ Z \sim N\ (0\ , 1\ )$$

من جانب اخر يمكن كتابة

$$p\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \ Z \ \leq \ +z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

حيت أن($1 - \alpha$) هو نسبة القيم داخل المجال او الاحتمال

نقوم بتعويض Z في المجال فحصل على

$$p\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{x - \mu}{\sigma} \ \leq \ +z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$\Rightarrow$

$$p\left(-\sigma\ z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \ x - \ \mu \ \leq \ +\sigma\ z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p\left(\mu - \sigma\ z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \ x \ \leq \ \mu \ + \sigma\ z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha} \ldots\ldots\ldots (1)$$

معنى ذلك أن نسبة $\boldsymbol{(1 - \alpha)}$ % من القيم تقع داخل المجال $\boldsymbol{\mu \ + \sigma\ z_{\frac{\alpha}{2}}}$ و $\boldsymbol{\mu - \sigma\ z_{\frac{\alpha}{2}}}$

مثال :

ليكن X متغير عشوائي يخضع إلى توزيع طبيعي بمتوسط حسابي μ و تباين σ^2

نبرهن ان 95,44 % تقع ما بين ($\mu - \sigma 2$ و $\mu + \sigma 2$)

$$X \sim N\ (\ \mu\ , \sigma\ )$$

Si on pose T = $\frac{X - \mu}{\sigma}$ $\Rightarrow$ T$\sim N\ (\ o\ , 1)$

$$p\left(-\sigma\ z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \ x - \ \mu \ \leq \ +\sigma\ z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

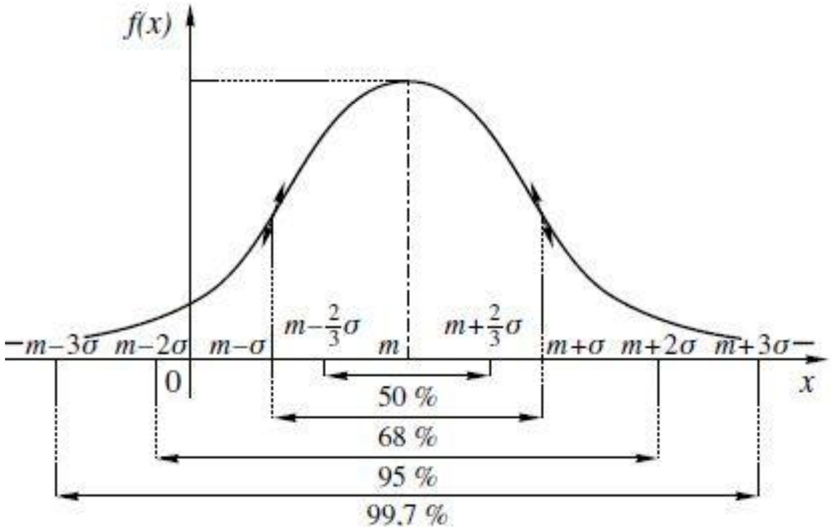
$$\Rightarrow \quad p\ (-\sigma - z_{\frac{\alpha}{2}} \leq X - \mu \leq + \sigma + z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \quad p\ (\ \mu - \sigma\ z_{\frac{\alpha}{2}} \ \leq \ X \ \leq \ \mu \ + \ \sigma\ z_{\frac{\alpha}{2}}\ ) = 1 - \alpha$$

$1 - \alpha = 95{,}44\ \% \Rightarrow \alpha = 1 - 95{,}44\ \% \Rightarrow \alpha = 4{,}56\ \% = 0{,}0456$

$\Rightarrow t\alpha \quad de\ \alpha = 0{,}0456$ (Tableau 2 de l'écart réduit)

$\Rightarrow t\alpha = 2 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{p\,(\mu - 2\,\sigma \leq X \leq \mu + 2\,\sigma) = 95{,}44\ \%}$



حساب E(X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$\Rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x}.\exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

On pose $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ avec $-\infty \leq y \leq +\infty$

$y = \mu + \sigma y \quad , \quad dx = \sigma dy$

$E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma y).\exp -\frac{1}{2} y^2 \sigma \mathrm{dy}$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}y^2} dy + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{\frac{-1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} y\, e^{\frac{-1}{2}y^2} dy + \int_{0}^{+\infty} y\, e^{\frac{-1}{2}y^2} dy = \mu$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{E(X) = \mu}}$$

حساب V(X)

On pose $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . \exp - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} dx$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma^2 u^2 + 2\mu\sigma u + u^2) e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du + u^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 \qquad \boldsymbol{V(x) = \sigma^2}$$

التوزيع الطبيعي المعياري Z و حساب الاحتمالات

اذا اعتبرنا ان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي μ و انحرافه المعياري σ أي أن $X \sim N(\mu, \sigma)$ ، و ليكن Z متغير عشوائي حيث أن $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ، ففي هذه الحالة نقول أن Z يخضع لتوزيع طبيعي معياري و نكتب

$$Z \sim N(0, 1)$$

ويمكن استنتاج دالة كثافة احتمال Z على النحو التالي:

$$F(z) = P(Z \leq z)$$

$$= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq \sigma z + \mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{\sigma z + \mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma\, e^{\frac{-1}{2}w^2} dw \qquad \text{avec } w = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(z) = F'(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2}}$$

استنتاج توقع وتباين المتغير العشوائي الطبيعي المعياري Z

اذا اعتبرنا ان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي μ و انحرافه المعياري σ أي أن

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ avec

$$Z \sim N(0, 1)$$

$$E(Z) = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(x-\mu) = \frac{1}{\sigma}(E(x)-\mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(x-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}(V(x)-V(\mu))$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(\sigma^2-0) \quad = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

حساب الاحتمالات (التوزيع الطبيعي

يتم استخدام دالة التوزيع المتجمع للتوزيع الطبيعي المعياري Z (حيث ان قيمها الاحتمالية موجودة في جدول الطبيعي Z) في حساب الاحتمالات المتعلقة بمتغير عشوائي x وسطه الحسابي μ و انحرافه المعياري $\boldsymbol{\sigma}$ على النحو التالي :

$$\boxed{F(Z) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}} \boldsymbol{e^{\frac{-1}{2}z^2}} = \boldsymbol{\phi}(z)}$$

$$F(z) = P(Z \leq z) = \boldsymbol{\phi(z)}$$

كما يمكن استخدام الخواص التالية في حساب الاحتمالات

$$P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - F(z) = 1 - \phi(z)$$

$$P(a \leq Z \leq b) = \phi(b) - \phi(a)$$

$$p(-a \leq Z \leq b) = \phi(b) - [1 - \phi(a)]$$

$p(-a \leq Z \leq -b) = \phi(a) - \phi(b)$

$p(Z \leq -a) = p(Z \geq a) = 1 - \phi(a)$

$P(Z \geq -a) = p(Z \leq a) = \phi(a)$

مثال تطبيقي 1

X متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي 12 و انحرافه المعياري 4 أي أن $X \sim N(12, 4)$

أحسب الاحتمالات التالية:

$p(X \leq 15)$ $P(X \geq 11)$ $P(10 \leq X \leq 12)$

$P(X \leq 9{,}5)$

حل المثال التطبيقي 1

On pose $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ avec

$Z \sim N(0, 1)$

1/ $p(X \leq 8) = P\left(Z \leq \frac{15-8}{4}\right) = \mathrm{P}(Z \leq 1{,}75) =$
$\phi(1{,}75) = 0{,}959 \Rightarrow \boldsymbol{p(X \leq 8) = 0{,}959}$

2/ $P(X \geq 11) = P\left(Z \geq \frac{11-12}{4}\right) = P(Z \geq -0{,}75)$

$\Rightarrow P(Z \geq -0{,}75) = P(Z \leq 0{,}75) = \phi(0{,}75) = 0{,}773$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(X \geq 11) = 0{,}773}$

3/ $P(10 \leq X \leq 12) = p\left(\frac{10-12}{4} \leq Z \leq \frac{12-12}{4}\right)$

$= P(-0{,}5 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 0{,}5)]$

$$= \phi(0)\text{-}[1-\phi(0{,}5)] = 0{,}5 - [1 - 0{,}691] = 0{,}191$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(10 \le X \le 12) = 0,191}$$

4/ $P(X \le 9{,}5) = P\left(\frac{9{,}5-12}{4} \le Z\right) = P(Z \le -0{,}625)$

$$\Rightarrow P(Z \le -0{,}625) = P(Z \ge 0{,}625) = 1 - \phi(0{,}625)$$

$$= 1 - 0{,}732 = 0{,}268$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(X \le 9,5) = 0,68}$$

مثال تطبيقي 2

X متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي 18 و انحرافه المعياري 5 أي أن $X \sim N(18, 5)$

عين الاعداد الحقيقية a و b بحيث:

$P(X \le a) = 0{,}7$ $\qquad\qquad$ $P(X \ge b) = 0{,}8$

1/ $\boldsymbol{P(X \le a) = 0,7}$

On pose $= \frac{x-\mu}{\sigma}$, $Z \sim N(0, 1)$

$$P(X \le a) = 0{,}7 \Rightarrow P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{a-18}{5}\right)$$

On pose $a' = \frac{a-18}{5} \Rightarrow P(Z \le a') = 0{,}7 \Rightarrow \phi(a') = 0{,}7$

Table de la loi normale : si $\phi(a') = 0{,}7 \Rightarrow a' = 0{,}52$

On sait que $a' = \frac{a-18}{5} \Rightarrow \frac{a-18}{5} = 0{,}52 \Rightarrow \boldsymbol{a = 20,6}$

2/ $\boldsymbol{P(X \ge b) = 0,8}$

$$P(X \ge b) = 0{,}8 \Rightarrow P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \ge \frac{b-18}{5}\right)$$

On pose $-b' = \frac{b-18}{5} \Rightarrow P(Z \geq -b') = 0{,}8$, $b' < 0$

$\Rightarrow P(Z \geq -b') = 0{,}8 \Rightarrow P(Z \leq b') = 0{,}8$

$\Rightarrow \phi(b') = 0{,}8 \Rightarrow b' = 0{,}84$

On sait que $-b' = \frac{b-18}{5} \Rightarrow \frac{b-18}{5} = -0{,}84 \Rightarrow \boldsymbol{b = 13{,}8}$