التحـليـل التوافـقي Analyse combinatoire

1. المبدأ الأساسي في العد

نفرض أنه يجب علينا القيام بتجربتين، التجربة الأولى تتمثل في الحصول على عنصر واحد من مجموعة n عنصر أما التجربة الثانية فتتمثل في الحصول على عنصر واحد من مجموعة ثانية ذات m عنصر، إذا أردنا تحديد عدد الحالات الممكنة لسحب العنصرين فيكون ذلك بحاصل ضرب عدد عناصر المجموعة الأولى ذات n عنصر في عدد عناصر المجموعة الثانية ذات m عنصر أي m*n حالة ممكنة

يمكن اثبات ذلك على النحو التالي:

(1, 1) (1,2) ………, (1,n)

(2,1) (2,2) ……….(2, n)

…. ….. ……

….. ….. …….

(m,1) (m,2) ……….(**m, n**)

مثال 1

نفترض انه لدينا أربعة أفواج من الطلبة، الفوج الأول يتكون من 20 طالب، الفوج الثاني 15 طالب الفوج الثالث 16 طالب والفوج الرابع 25 طالب، تريد إدارة الكلية تشكيل لجنة لتمثيل الافواج تتكون من أربعة طلبة (طالب واحد من كل فوج)، عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الحالة يكون على النحو التالي:

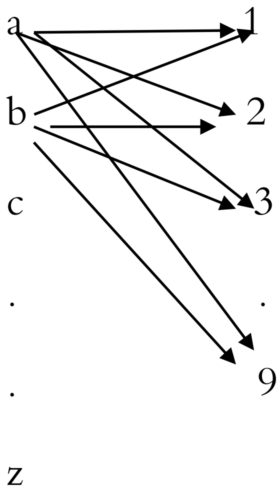
$$20 \times 15 \times 16 \times 25 = \mathbf{120000\ cas}$$

مثال 2

ما هو عدد الثنائيات الممكن تشكليها من حرف بالفرنسية ورقم

26 lettres $\{a, b\ ,\ c \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..z\}$

10 Chiffres $\{0,1,2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..9\}$

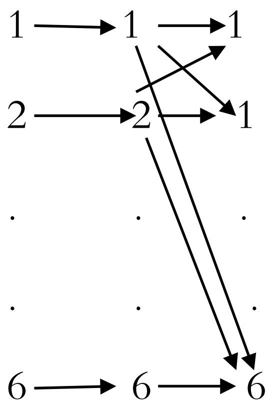


26 x 10 = 260 cas

مثال 3

نرمي زهرة نرد متجانسة ثلاث مرات متتالية، يمكن تحديد عدد الحالات الممكنة على النحو التالي

$\{\ 1,2,3,4,5,6\ \}$



= 6 x 6 x 6 = 216 cas

2. الترتيبات Arrangements

تعريف: هي كل ترتيب لـ k عنصر مختارا من بين n عنصر بحيث لا يمكن لكل عنصر الضهور أكثر من مرة واحدة ل ويرمز لها بـ A_n^k ويمكن تحديد عدد الترتيبات على النحو التالي:

A_n^k= n $(n-1)$ $(n-2)$ … … … … $n-(k-1)$

A_n^k= n $(n-1)$ $(n-2)$ … … … … $n-k+1$

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots\ldots 1}{(n-k)(n-k-1)\ldots\ldots 1}$$

$$\Rightarrow \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال 1 :

بكم كيفية يمكن تشكيل كلمة سر مكونة من أربعة ارقام (الرقم لا يظهر أكثر من مرة واحدة)

عدد الأرقام هو 10أرقام $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ n= 10 , k= 4

عدد الحالات الممكنة هو عبارة عن ترتيب لـ 4 عناصر من بين 10 عناصر حيث:

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10x9x8\ldots\ldots 1}{6x5x4\ldots 1}$$

$$\Rightarrow \quad A_{10}^4 = 10 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 = \mathbf{5040\ cas}$$

مثال 2

أعلنت شركة معينة عن أربعة وظائف شاغرة فتقدم 15 شخص بملفاتهم، بكم كيفية يمكن تنصيب 3 أشخاص من بين هؤلاء الأشخاص في ثلاثة وظائف (الوظائف مختلفة) ولا يمكن لشخص أن يشغل أكثر من منصب واحد

n= 15, k= 3

$$A_{15}^{3} = \frac{\mathbf{15!}}{(\mathbf{15-3})!} = \frac{15!}{12!} = 15 \text{ x } 14 \text{ x } 13 = \mathbf{2730} \text{ cas}$$

3. التبديلات Permutations

هي حالة خاصة من الترتيبات حيث يكون k=n ويرمز لها بـ P_n ويمكن استنتاج قانون التبديلات انطلاقا من قانون الترتيبية على النحو التالي:

On sait que $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Si n=k $\Rightarrow$ $A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{(0)!} = n!$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_n = n!}$$

مثال 1 : بكم كيفية يمكن توزيع خمسة وظائف على خمسة أشخاص

عدد الحالات الممكنة عبارة عن تبديلة لـ 5 عناصر على النحو التالي

P_5 = 5 ! = 5 x 4 x3 x 2 x 1 = **120 cas**

مثال 2: ما هو عدد الكلمات الممكن تشكيلها (دون مراعاة المعنى) باستخدام أحرف كلمة GESTION

عدد الحالات الممكنة عبارة عن تبديلة لـ 7 عناصر على النحو التالي

P_7 = 7 ! = 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 5040 **cas**

مثال 3 : شارك في سباق 10 عدائين، كم توجد من كيفية لوصولهم

عدد الحالات الممكنة عبارة عن تبديلة لـ 10 عناصر على النحو التالي

P_{10} = 10 ! =10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = **2628800 cas**

- **حالة خاصة (تبديلة بالتكرار)**

نعتبر مجموعة عدد عناصرها n عنصر مقسمة الى k فئة بحيث لا يمكن التفرقة بين عنصرين من نفس الفئة، حيث عدد عناصر هذه الفئات على الترتيب هو n_1 ، n_2 ...... n_k ، فكل تبديلة على عناصر هذه المجموعة تسمى تبديلة بالتكرار و يرمز لها بـ $\widetilde{P_n}$ و عدد عناصر على النحو التالي :

$$\widetilde{P_n} = \frac{n\,!}{n_1!*n_2!.............*n_k!}$$

مثال1 : كم كلمة (دون مراعاة المعنى) يمكن تشكيلها بحروف كلمة STATISTIQUE

- عدد التكرارات حرف T هو ثلاث مرات تمثل ! 3
- عدد تكرارات حرف S هو مرتين تمثل ! 2
- عدد تكرارات حرف I هو مرتين تمثل ! 2
- عدد حروف الكلمة هو 11 تمثل ! 11

عدد الكلمات الممكنة هو عبارة عن تبديل بالتكرار حيث:

$$\widetilde{P_{10}} = \frac{10\,!}{3!*2!*2!}$$

مثال2 : ارقام الهاتف في مدينة معينة تتشكل من 9 أرقام، ما هو عدد الأرقام الممكن تشكيلها بحيث الرقم 0 يظهر مرتين ، الرقم 2 يظهر ثلاث مرات، الرقم 3 يظهر ثلاث مرات، الرقم 4 يظهر مرة واحدة فقط

- عدد تكرارات رقم 0 هو مرتين تمثل ! 2
- عدد تكرارات رقم 2 هو ثلاث مرات تمثل ! 3
- عدد تكرارات رقم 3 هو ثلاث مرات تمثل ! 3
- عدد تكرارات رقم 4 هو مرة واحدة تمثل ! 1
- عدد ارقام خط الهاتف هو 9 و هي تمثل ! 9

عدد الخطوط الهاتفية الممكنة هو عبارة عن تبديل بالتكرار حيث:

$$\widetilde{P_9} = \frac{9\,!}{2!*3!*3!*1!}$$

4. القـــائمة

القائمة هي عبارة عن ترتيبة بالتكرار، بحيث يمكن للعنصر أن يظهر أكثر من مرة و يرمز لها بـ $\tilde{A}_n^k$، اذا كان لدينا قائمة لـ k عنصر من بين n عنصر، فيمكن تحديد عدد الحالات الممكنة على النحو التالي:

$$\tilde{A}_n^k = n_1{}^* n_2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, n_{k-1}{}^* n_k$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\tilde{A}_n^k = n^k}$$

مثال 1 : ماهو عدد الكلمات الممكن تشكيلها باللغة العربية (دون مراعاة المعنى) مكونة من سنة حروف مع إمكانية ظهور الحرف أكثر من مرة واحدة

عدد حروف اللغة العربية هو 28حرف أي أن n= 28

عدد حروف الكلمة هو ستة حروف أي أن k= 6

عدد الكلمات الممكن هو عبارة عن قائمة لـ 6 عناصر من بين 28 عنصر

$$\tilde{A}_{28}^6 = 28^6 = \mathbf{481890304\ cas}$$

مثال 2 : كم يوجد من رقم خط هاتف مكون من 9 أرقام (يمكن للرقم أن يظهر أكثر من مرة)

عدد الأرقام الكلية هو 10 أرقام أي أن n=10

عدد أرقام خط الهاتف هو 9 أرقام أي أن k=9

عدد الخطوط الهاتفية الممكنة هو عبارة عن قائمة لـ 9 عناصر من بين 10 عناصر

$$\tilde{A}_{10}^9 = 10^9 = \mathbf{1000000000\ cas}$$

إذا افترضنا أن الرقمين 1 و2 لا يظهران في الخط الهاتفي، في هذه الحالة يكون لدينا قائمة لـ 9 عناصر من بين 8 أرقام فقط، وذلك على النحو التالي:

$$\tilde{A}_8^9 = 8^9 = \mathbf{134217728\ cas}$$

5. التوفيقات **Combinaisons**

التوفيقة هي كل مجموعة جزئية لـ k عنصر من بين n عنصر، بحيث يكون ترتيب العناصر غير مهم، وتستخدم التوفيقة عادة عند السحب في ان واحد و يرمز لها بـــ C_n^k، ويمكن استنتاج قانون التوفيقة على النحو التالي:

$$C_n^k = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots n-k+1}{k!}$$

$$\Rightarrow C_n^k = \frac{1}{k!}[n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots n-k+1]$$

Avec $n\ (n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots n-k+1 = \frac{n!}{(n-k)!}$

$$\Rightarrow C_n^k = \frac{1}{k!}\left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

ويمكن استنتاج العلاقة بين التوفيقة والترتيبة على النحو التالي:

$$C_n^k = \frac{1}{k!}\left[\frac{n!}{(n-k)!}\right]$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k \Rightarrow C_n^k = \frac{1}{k!}A_n^k$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}}$$

$$\text{et } \boldsymbol{A_n^k = k!\ C_n^k}$$

مثال 1

فوج اعمال موجهة يتكون من 30 طالب، 20 ذكور و10 اناث، نختار 8 طلبة من هذا الفوج، بكم كيفية يمكن اختيار الطلبة حسب الحالات التالية

- 8 طلبة ذكور
- 8 طلبة اناث
- 6 طلبة ذكور و 2 اناث

حل المثال1 :

عدد الحالات الممكنة عبارة عن توفيق لان الترتيب غير مهم

حالة 8 طلبة ذكور

$$C_{20}^{8} = \frac{20!}{8!(20-8)!} = \frac{20!}{8!(12)!} = \frac{20*19*18.........1}{8!(12*11*10........1}$$

$$\Rightarrow C_{20}^{8} = \frac{20*19*18*17*16*15*14*13}{8*7*6*5*4*3*2*1}$$

$$\Rightarrow C_{20}^{8} = \frac{5079110400}{40320} = \textbf{125970 cas}$$

حالة 8 طلبة اناث

$$= C_{10}^{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10!}{8!(2)!} = \frac{10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{8!(2)}$$

$$\Rightarrow C_{10}^{8} = \frac{10*9*8*7*6*5*4*3}{8*7*6*5*4*3*2*1} = \frac{10*9}{2*1} = \textbf{45 cas}$$

حالة 6 طلبة ذكور و 2 اناث

$$= C_{20}^{6} \, . \, C_{10}^{2}$$

مثـــال2

صندوق يحتوي على 10 كريات بيضاء، 6 كريات حمراء و4 كريات سوداء، نسحب 4 كريات من هذا الصندوق، ما هو عدد إمكانيات السحب حسب الحالات التالية:

- كل الكريات المسحوبة حمراء
- الكريات المسحوبة من نفس اللون
- سحب 2 كريات بيضاء على الأكثر
- سحب ثلاث كريات حمراء على الأقل

حل المثال 2

A / كل الكريات المسحوبة حمراء

$$A = C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!(2)!}$$

B/ الكريات المسحوبة من نفس اللون (معناه كل الكريات بيضاء أو كل الكريات حمراء أو كل الكريات سوداء)

C_{10}^{4} في حالة كل الكريات بيضاء

C_{6}^{4} في حالة كل الكريات حمراء

C_{4}^{4} في حالة كل الكريات سوداء

ثم نقوم بالجمع للحصول على عدد الحالات الكلية

$$B = C_{10}^{4} + C_{6}^{4} + C_{4}^{4}$$

C / سحب 2 كريات بيضاء على الأكثر

يعني ذلك 2 كريات بيضاء أو كرية بيضاء واحدة أو صفر كريات بيضاء

في حالة 2 كريات بيضاء $C_{10}^{2} \,.\, C_{10}^{2}$

في حالة كرية بيضاء واحدة $C_{10}^{1} \,.\, C_{10}^{3}$

في حالة صفر كرية بيضاء $C_{10}^{0} \,.\, C_{10}^{4}$

ثم نقوم بالجمع للحصول على الحالات الممكنة

$$C = C_{10}^{2} \,.\, C_{10}^{2} + C_{10}^{1} \,.\, C_{10}^{3} + C_{10}^{0} \,.\, C_{10}^{4}$$

D / سحب ثلاث كريات حمراء على الأقل

يعني ذلك سحب 3 كريات حمراء أو 4 كريات حمراء (لان الحد الأقصى للسحب هو 4

في حالة 3 كريات حمراء $C_{6}^{3} \,.\, C_{14}^{1}$

في حالة 4 كريات حمراء $C_{6}^{4} \,.\, C_{14}^{0}$

ثم نقوم بالجمع للحصول على الحالات الممكنة

$$D = C_{6}^{3} \,.\, C_{14}^{1} + C_{6}^{4} \,.\, C_{14}^{0}$$

خصائص التوفيقات

1) $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0!)}$, avec $0! = 1$

$\Rightarrow C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0!)} = \frac{n!}{(n!)} \Rightarrow \boldsymbol{C_n^0 = 1}$

$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n!)} = \frac{n!}{(n!)} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{C_n^n = 1}$

$$\boldsymbol{C_n^0 = C_n^n = 1}$$

2) $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)k!}$

$$\frac{n!}{(n-k)k!} = C_n^k$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_n^{n-k} = C_n^k}$$

3) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C_{k-1}^{k-1}$

4) $C_n^k = \frac{n}{p}\ C_{n-1}^{k-1}$

5) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

6) $2^n = C_n^0 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^p + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . C_n^n$

سلسلة تمارين حول التحليل التوافقي

التمرين الأول

- بكم كيفية يمكن تشكيل رقم سر مكون من أربعة أرقام (يمكن للرقم الظهور أكثر من مرة واحدة في كلمة السر)
- بكم كيفية يمكن توزيع خمسة غرف على خمسة زبائن في فندق
- بكم كيفية يمكن تشكيل كلمة سر مكونة من 7 أحرف باللغة الفرنسية (لا يمكن للحرف أن يظهر أكثر من مرة)
- نرمي زهرة نرد متجانسة ثلاث مرات متتالية في الهواء، ما هو عدد النتائج الممكن الحصول عليها

التمرين الثاني

تحتوي علبة على (20) مصباح صالح و (10) مصابيح فاسدة، بكم كيفية يمكن سحب(8) مصابيح عشوائيا حسب الحالات التالية

- كل المصابيح المسحوبة صالحة
- كل المصابيح المسحوبة فاسدة
- سحب 6 مصابيح صالحة
- سحب 3 مصابيح صالحة على الأكثر
- سحب 5 مصابيح فاسدة على الأقل

التمرين الثالث

تتكون الخطوط الهاتفية في مدينة معينة من (07) أرقام، ما هو عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها حسب الحالات التالية:

- الرقم (0) يظهر مرتين في الخط الهاتفي
- الرقم 2 يظهر مرتين على الأقل
- الرقم 1 يظهر مرة واحدة، الرقم 3 يظهر مرتين والرقم 5 يظهر أربع مرات

سلسلة تمارين حول التحليل التوافقي حلول

حل التمرين الأول

A / تشكيل رقم سر مكون من أربعة أرقام (يمكن للرقم الظهور أكثر من مرة واحدة في كلمة السر) ، هي عبارة عن قائمة لأن الترتيب مهم و التكرار ممكن

$$A = \tilde{A}_{10}^{4} = \mathbf{10^4} = 10\ 000 \text{ cas}$$

B / توزيع خمسة غرف على خمسة زبائن في فندق، عبارة عن تبديلة بدون تكرار

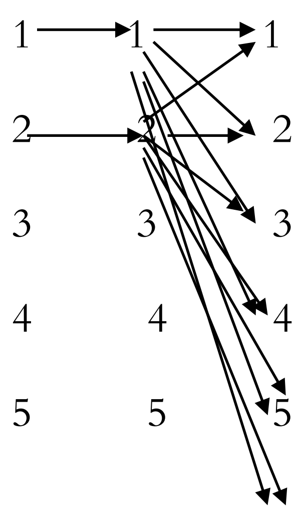
$$B = P_5 = 5\,! = 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 \text{ x } 1 = 120 \text{ cas}$$

C / تشكيل كلمة سر مكونة من 7 أحرف باللغة الفرنسية (لا يمكن للحرف أن يظهر أكثر من مرة)

عبارة عن ترتيب لـ 7 عناصر من بين 26 عنصر

$$c = A_{26}^{7} = \frac{28!}{(28-7)!} = \frac{28!}{(21)!}$$

D / نرمي زهرة نرد متجانسة ثلاث مرات متتالية في الهواء، ما هو عدد النتائج الممكن الحصول عليها



D = 6 x 6 x 6 = 216 cas

6 6 6

حل التمرين الثاني

A / كل المصابيح المسحوبة صالحة

نستخدم التوفيقات لان الترتيب غير مهم والسحب تم في ان واحد

$$A = C_{20}^{8} = \frac{20!}{8!(20-8)!} = \frac{20!}{8!(12)!}$$

B / كل المصابيح المسحوبة فاسدة

$$B = C_{10}^{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10!}{8!(2)!}$$

C / سحب 6 مصابيح صالحة

$$C = C_{20}^{6} \cdot C_{10}^{2}$$

D / سحب 3 مصابيح صالحة على الأكثر ، معنى ذلك ثلاث مصابيح صالحة او مصباحين صالحين أو مصباح صالح واحد أو صفر مصباح صالح

$$D = C_{20}^{3} \cdot C_{10}^{5} + C_{20}^{2} \cdot C_{10}^{6} + C_{20}^{1} \cdot C_{10}^{7} + C_{20}^{0} \cdot C_{10}^{8}$$

E / سحب 5 مصابيح فاسدة على الأقل

يعني سحب خمس مصابيح فاسدة أو 6 مصابيح فاسدة أو 7 مصابيح فاسدة أو 8 مصابيح فاسدة

$$E = C_{10}^{5} \cdot C_{20}^{3} + C_{10}^{6} \cdot C_{20}^{2} + C_{10}^{7} \cdot C_{20}^{1} + C_{10}^{8} \cdot C_{20}^{0}$$

حل التمرين الثالث

تتكون الخطوط الهاتفية في مدينة معينة من (07) أرقام

A / الرقم (0) يظهر مرتين في الخط الهاتفي

نختار خمسة ارقام أخرى من أصل تسعة ارقام لان الرقم 0 يظهر مرتين فقط

$$A = C_7^2 \ . \ \tilde{A}_9^5$$

B / الرقم 2 يظهر مرتين على الأقل

معنى ذلك ان الرقم 2 يظهر من مرتين الى غاية 7 مرات، عدد الحالات الممكنة يكون على النحو التالي:

$$B = C_7^2 \ . \ \tilde{A}_9^5 + C_7^3 \ . \ \tilde{A}_9^4 + C_7^4 \ . \ \tilde{A}_9^3 + C_7^5 \ . \ \tilde{A}_9^2 + C_7^6 \ . \ \tilde{A}_9^1 + C_7^7 \ . \ \tilde{A}_9^0$$

الطريقة الثانية هي الطريقة العكسية، يعني ان الرقم 2 يظهر مرة واحدة على الأكثر،

$$B = \tilde{A}_{10}^7 - \left[\tilde{A}_9^7 + C_7^1 \ . \tilde{A}_9^6 \right]$$

$\tilde{A}_9^7$ عدد الحالات الممكنة (الرقم 2 لا يظهر في الخط الهاتفي)

$C_7^1 \ . \tilde{A}_9^6$ عدد الحالات الممكنة (لرقم 2 يظهر مرة واحدة)

$\tilde{A}_{10}^7$ عبارة عن عدد الحالات الممكنة الكلية لتشكيل خط هاتفي بسبعة ارقام

D / الرقم 1 يظهر مرة واحدة، الرقم 3 يظهر مرتين والرقم 5 يظهر أربع مرات

عبارة عن **تبديلة بالتكرار**، عدد الحالات الممكنة يكون على النحو التالي:

$$\widetilde{P_7} = \frac{7!}{1!.*2!*4!}$$

حيث ! 1 هي عبارة عن تكرار الرقم 1 ، ! 2 عبارة عن تكرار الرقم 3 و ! 4 عبارة عن تكرار رقم 5

و من جانب اخر ! 7 عبارة عن عدد ارقام الخط الهاتفي