- محاضرات وتمارين رياضيات مالية

السنة الثالثة علوم تجارية

الأستاذ: غارة ابراهيم

الدفعات الثابتة

① تعريف الدفعة الثابتة: هي عبارة عن مبلغ مالي ثابت يدفع بشكل منتظم خلال كل وحدة زمنية (عادة ما تكون سنة) بهدف تكوين رأس مال (دفعات الإستثمار) أو بهدف تسديد دين وتسمى وهذه الحالة دفعات السداد.

② الصيغة العامة للقيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

نضع a: مبلغ الدفعة الثابتة

i: معدل الفائدة المركبة

n: عدد الدفعات

V_n: القيمة الحالية في نهاية المدة

$$A_n = a + a(1+i) + \dots + a(1+i)^{n-3} + \dots + a(1+i)^{n-1}$$

الناتج عبارة عن متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها q وعدد حدودها n، ومجموع حدودها S حيث

$$S = a \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad q = (1+i)$$

$$\Rightarrow A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \Rightarrow \boxed{A_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

قانون القيمة الحالية.

انتهى

حالة خاصة: في حالة دفع الدفعة الأخيرة في بداية المدة

نضيع العلاقة الخاصة بالرقمة الدكسية كما يلي

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$$

الرقمة الدكسية لحالة دفع الدفعة الأخيرة في بداية المدة

مثال: أحسب الرقمة الدكسية لـ 8 دفعات ثابتة قيمة كل دفعة 80,000 دج (تدفع في نهاية كل سنة) بمعدل فائدة مركبة 5%

$a = 80,000 \quad n = 8$

$i = 5\% \quad V_n = ?$

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow V_n = 80,000\frac{(1,05)^8 - 1}{0,05}$$

$$\Rightarrow V_n = 80,000(9,549109)$$

$$\Rightarrow V_n = 763928,64$$

3) استخدام الصيغة الخاصة للرقمة الدكسية لثابتة دفعات نهاية المدة:

P) حساب مبلغ الدفعة a

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow a = V_n\frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Exo4

3) حساب عدد الدفعات n

نعلم أن:

$$V_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{V_n}{a}$$

$$(1+i)^n - 1 = \frac{V_n(i)}{a}$$

$$\Rightarrow (1+i)^n = \frac{V_n(i)}{a} + 1$$

$$\boxed{b = \frac{V_n(i)}{a} + 1}$$ حيث

$$\Rightarrow (1+i)^n = b$$

$$n \log(1+i) = \log b$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{\log b}{\log(1+i)}}$$

مثال:

القيمة الكسيمة لـ n دفعة ثابتة المبلغ تساوي 437461,6 تعمل فائدة مركبة 6٪، وقيمة كل دفعة 100.000 أحسب عدد الدفعات n.

الحل:

$a = 100.000$

$n = ?$

$V_n = 437461,6$

$i = 6\%$

b حساب

$$b = \frac{V_n(i)}{a} + 1$$

$$\Rightarrow b = \frac{437461,6\,(0,06)}{100.000} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 1,262476}$$

$$n = \frac{\log b}{\log(1+i)}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log(1,262476)}{\log(1,06)}$$

$$\Rightarrow n = \frac{0,101223}{0,025305}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 4}$$

عدد الدفعات الثابتة هو 4

④ القيمة الحالية لمتتالية دفعات نهاية المدة

- يمكن استنتاج قانون القيمة الحالية لمتتالية دفعات نهاية المدة V_0 على النحو التالي

a الدفعة الثابتة
i معدل الفائدة المركبة
n عدد الدفعات
V_0 القيمة الحالية

$$V_0 = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

- كما يمكن استنتاج قانون الدفعة الثابتة a انطلاقا من القيمة الحالية V_0 على النحو التالي

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

مثال 1: قرض نقدي 500,000 سدد بواسطة 5 دفعات ثابتة، بمعدل فائدة مركبة 5٪ الدفعة الأولى تسدد في نهاية السنة الأولى من إبرام العقد المطلوب: احسب الدفعة a

$V_0 = 500.000 \quad n = 5$
$i = 5\% \quad a = ?$
a الدفعة الثابتة المطلوب حساب

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\Rightarrow a = 500,000 \frac{0,05}{1-(1,05)^{-5}}$$

$$\Rightarrow a = 500,000 \frac{0,05}{0,216476}$$

$$\Rightarrow a = 500,000 (0,230974)$$

$$\Rightarrow a = 115486$$

مثال 2:

قرض يسدد بواسطة 6 دفعات متساوية كل دفعة 120,000 الدفعة الأولى تسدد في نهاية السنة الأولى من إبرام العقد علما أن معدل الفائدة المركبة هو 4٪

المطلوب: احسب مبلغ القرض V_0

حل المثال 4 :

$n = 6$ $\quad V_0 = ?$

$i = 4\%$ $\quad a = 120{,}000$

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\Rightarrow V_0 = 120{,}000\frac{1-(1{,}04)^{-6}}{0{,}04}$$

$$\Rightarrow V_0 = 120{,}000(5{,}242136)$$

$$\Rightarrow V_0 = 629056{,}38$$

5) تقديم مثالية دفعات نهاية المدة في أي تاريخ

5-1) تقديم مثالية دفعات نهاية المدة في الزمن j حيث $j > n$

$$A_j = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{j-n}$$

- باستخدام قانون القيمة الحالية

$$A_j = A_0(1+i)^j$$

5) تقديم مثالية دفعات نهاية المدة في الزمن m حيث $m < n$

$$A_m = A_n(1+i)^{m-n}$$

$$A_m = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n}$$

- باستخدام قانون القيمة الحالية

$$A_m = A_0(1+i)^m$$

مثال :

قرض سديد بواسطة 8 دفعات ثابتة قيمة كل دفعة 10,000 ج الدفع الأولى بعد سنة من إبرام العقد بمعدل فائدة مركبة 5%

1- أوجد المبلغ الذي يدفع الدين عاد السديد مباشرة وحدد زمن نهاية السنة العاشرة

الحلول :

- احسب مبلغ الدفع الوحيد بطريقتين

حل المثال :

$a = 10.000$ $n = 8$ $i = 5\%$

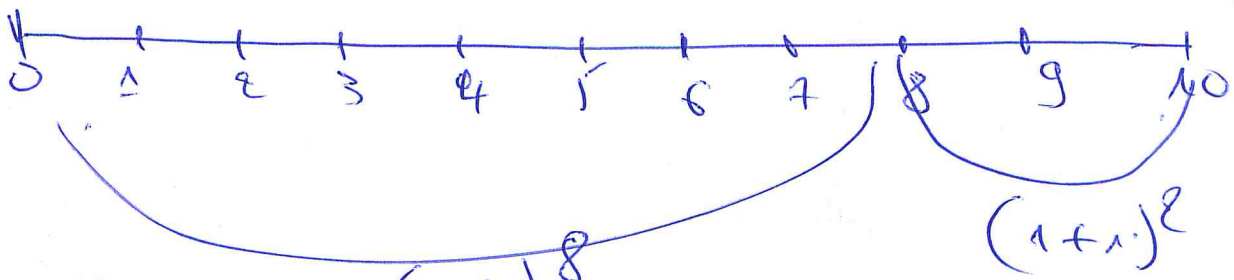
- حساب مبلغ الدفع الوحيد

ط١ : طريقة الفائدة المركبة

$$A_{10} = V_n (1+i)^2$$

$$\Rightarrow A_{10} = a \frac{(1+i)^8 - 1}{i} (1+i)^2$$

$$\Rightarrow A_{10} = 10.000 \frac{(1,05)^8 - 1}{0,05} (1,05)^2$$



$$\Rightarrow \boxed{A_{10} = 105\,278,91}$$

ط٢ طريقة القيمة الحالية

$$A_{10} = A_0 (1+i)^{10}$$

$$A_{10} = a \frac{1-(1+i)^{-8}}{i} (1+i)^{10}$$

$$\Rightarrow A_{10} = 10.000 \frac{1-(1,05)^{-8}}{0,05} (1,05)^{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{10} = 105\,278,91}$$

6 ن