وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة – غليزان –

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

دروس على الخط في مقياس :

الإحصاء التطبيقي

من إعداد: د. بشيكر عابد

موجهة لطلبة الماستر شعبة العلوم المالية والمحاسبية

تخصص: مالية مؤسسة

ان الدراسة الإحصائية والقياسية للظواهر الإقتصادية تعتمد أساسا على النظرية الإقتصادية والتي على أساسها يتم تصميم وتمثيل تجريبي مبسط للوضع الاقتصادي، وعلى هذا الأساس سنتطرق في هذه المحاضرة الى التعريف بالنموذج الإقتصادي بالإضافة الى التعريف بالاقتصاد القياسي وأهدافه وعلاقته بالفروع الأخرى، وفي الأخير نتطرق إلى منهجية إعداد النموذج القياسي.

1- النموذج الاقتصادي : إن النموذج المستخدم لأي مشكلة اقتصادية ما هو إلا الشكل المبسط لها و الذي يأخذ على الأغلب شكل معادلات أو متباينات أو توابع تمثل العلاقة التي يمكن قياسها كميا ، لذا فقد وردت مجموعه من التعاريف عن النماذج جميعها تشترك في خاصية واحدة مستندة على الهدف الأساسي لعملية النمذجة فنجد الباحث I.Lowry يذهب الى تعريف النمذجة على أنها فن تبسيط العلاقات أي أن النموذج هو تمثيل مبسط للوضع الحقيقي المستند على نظرية، كما يذهب Britton Harris في تعريف النموذج"على انه تصميم تجريبي يعتمد على نظرية" ، كذلك يذهب الباحث **مُحَمَّد سالم الصفدي** في تعريفه للنموذج الإقتصادي على انه تمثيل مبسط للوضع الاقتصادي من خلال علاقات رياضية كمية أو بيانية تساعد المهتمين على اتخاذ قراراتهم المثالية ، فيما يذهب الباحث **مُحَمَّد نور برهان** إلى تعريف النموذج على أنه صياغة المشكلة بشكل معين يمكن من خلاله إيجاد حل لها بالطرق الرياضية.[1]

ومن خلال جميع هذه التعاريف يمكن أن نستخلص ان النموذج الإقتصادي هو مجموعة من العلاقات بين المتغيرات الإقتصادية لتمثيل ظاهرة معينة بصورة خالية من التفاصيل لتعقيدات و لكنها ممثلة للواقع بهدف تحليلها أو التنبؤ بها، ولصياغة نموذج اقتصادي يتم استخدام رموز رياضية فمثلا تفترض النظرية الاقتصادية أ الاستهلاك الذي نرمز له بالرمز C دالة في الدخل الذي نرمز له بالرمز Y أي أن :

$$C = f(y) \ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث : C : المتغير التابع

Y : المتغير المستقل

وبتحويل العلاقة (1) الى صيغتها الخطية التي تعتبر أبسط صيغة تحكم العلاقة بين المتغيرات الإقتصادية فتصبح من الشكل :

1 – قيس مجيد عبد الحسين علوش ، مفهوم وأهمية النماذج الإقتصادية ، كلية التربية للعلوم الانسانية جامعة بابل ، تاريخ النشر في الموقع 2013/03/15 /http://humanities.uobabylon.edu.iq

$$C = B_0 + B_1\, y + \xi_t \ \ldots\ldots\ldots(2)$$

حيث :

B_0: هو عبارة عن الاستهلاك الذاتي عندما $y=0$

B_1: هو عبارة عن الزيادة الحاصلة في قيمة المتغير C نتيجة زيادة قيمة المتغير Y بمقدار وحدة واحدة

ξ_t : هو عبارة عن الخطأ العشوائي للمعادلة والذي يمثل جميع العوامل الأخرى المحذوفة (حجم الأسرة، العادات ...إلخ) المفسرة للاستهلاك C ماعدا الدخل Y.

و مع العلم أ ن العمليات التخطيطية تبدأ بتحديد مشكلة ما و تنتهي في الأخير بإتباع قرار و إستراتيجية معينة ، وبالتالي فإن استخدام النماذج الرياضية الاقتصادية يمكن إدراك أهميته من خلال ما يأتي:

- قدرة النموذج على تعريف المشكلة ووصفها بالشكل ال ذي يجعلها مبسطة ومستندة في ذلك على نظرية لتسهيل تصوير الوقع الحقيقي
- إمكانية النموذج في التعريف على القيود والعوامل التي تحدد مدى الحلول المكونة للمسائل.
- يستطيع النموذج التنبؤ بظروف المستقبل من خلال التعرف على الغنى عنها في المشاكل الحالية.
- . يستطيع النموذج تقييم الكميات وتكاليفها ومدى تأثيرها ضمن محيط نظام لفهم مستوى الانجاز الكلي.
- تساعد النماذج في تبيان نتائج مختلفة للبدائل في القرارات وما يترتب على هذا من تزويدنا بأساس واعي للاختيار بين هذه البدائل.
- تساعد البدائل المختلفة التي يتوصل إليها النموذج من إعطاء مبادئ وأساسيات مهمة لرسم السياسات الاقتصادية والإقليمية والحضرية.
- يعد استخدام النماذج أساسا للحكم على مدى كفاءة نظام معين نحو الوصول إلى أهداف محددة

و إذا كانت النماذج الرياضية الاقتصادية في استخدامها هذا تعتبر أداة مهمة من أدوات التحليل ، وأنها أداة لا غنى عنها في دراسة معظم المشاكل وتحليلها، فإن استخدامها في نفس الوقت يوفر لنا جانبين مهمين:

الجانب الأول: هو تجنب مخاطر التغيير أو إجراء أي تعديل في حقيقة الظاهرة المدروسة (أي التحديد الدقيق للعناصر في المشكلة) دون السماح لأي إضافات لعناصر أخرى يمكن أن تضاف بقصد التحيز لحالة معينة.

الجانب الثاني : هو توفير عاملي الوقت والمال ، حيث باستخدا م أسلوب النمذجة الرياضية الاقتصادية يؤدي إلى اختصار كل الجهود و التكاليف التي كانت ستحدث لو اتبع الأسلوب الوصفي مثلا لجميع القوى والفعاليات المؤثرة في مشكلة ما.

2- التعريف بالإقتصاد القياسي، أهدافه و علاقته بالفروع الأخرى :

أ) **التعريف بالإقتصاد القياسي**: لقد استخدم مصطلح الاقتصاد القياسي لأول مرة سنة 1926 م ويرجع الفضل في ذلك إلى الاقتصادي النرويجي **Ranger Frisch** ، ويعرف على أنه القياس في الإقتصاد وهو مصطلح مترجم عن الكلمة الانجليزية Econometrics أو بالفرنسية Econométrie وبصورة أكثر هو العلم الذي يهتم بقياس العلاقات الاقتصادية من خلال بيانات واقعية بغرض اختبار مدى صحة هذه العلاقات كما تقدمها النظرية الاقتصادية، أو تفسير بعض الظواهر، أو رسم بعض السياسات، أو التنبؤ ببعض المتغيرات الاقتصادية .[1]

ب) **أهداف الإقتصاد القياسي**: من خلال التعريف يمكننا أن نستخلص ثلاثة أهداف رئيسية:

- بناء النماذج القياسية الاقتصادية في شكل قابل للاختبار الميداني.
- تقدير و اختبار هذه النماذج باستخدام البيانات المتوفرة.
- استخدام النماذج في التنبؤ و اتخاذ القرارات.
- استخدام النماذج في عمليات افتراضية أو بما يسمى بالمحاكاة، فمثلا عند زيادة الكتلة النقدية في اقتصاد معين، ماهو أثرها على المتغيرات الاقتصادية الاخرى كالاستثمار ومعدل البطالة،....إلخ.

1 – عبد القادر محمد عبد القادر عطية ،الاقتصاد القياسي بين النظرية و التطبيق ط 2 ، الاسكندرية مصر ، الدار الجامعية 2000 ص 03

ج) العلاقة بين الإقتصاد القياسي و الفروع الأخرى [1]: يرتبط الإقتصاد القياسي بثلاث فروع من المعرفة هي النظرية الإقتصادية و الاقتصاد الرياضي بالإضافة الى الإحصاء ، حيث تعتبر من بين أهم الركائز الأساسية التي يستخدمها الاقتصاد القياسي في قياس العلاقات الاقتصادية.

- **النظرية الاقتصادية و الإقتصاد القياسي** : تقدم لنا النظرية الاقتصادية فروضا مفسرة توضح العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية المختلفة و تفسر بعض الظواهر الاقتصادية ، ومن الأمثلة على ذلك قانون الطلب القائل "كلما ارتفع ثمن السلعة كلما انخفضت الكمية المطلوبة منها مع ثبات العوامل الأخرى على حالها، و العكس صحيح" ، و بالتالي تعتبر هذه الفرضية التي تحدد العلاقة بين الكمية المطلوبة من السلعة و سعرها كإحدى جزئيات النظرية الاقتصادية
- أما فيما يخص الاقتصاد الرياضي ما هو إلا إعادة صياغة العلاقات الاقتصادية كما تحددها النظرية من أسلوب لفظي الى أسلوب رياضي، و هذا يعني أنه لا يوجد هناك اختلاف بين النظرية الاقتصادية و الاقتصاد الرياضي إلا في وسيلة التعبير عن العلاقات الاقتصادية، فلو أخذنا المثال السابق الخاص بقانون الطلب في النظرية الاقتصادية يمكن صياغته رياضيا كمايلي :

$$D_1 = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + a_3Y + a_4S + \mu$$

حيث : D_1 : الكمية المطلوبة من السلعة 1

P_1 : سعر السلعة 1

P_2 : سعر السلعة 2

Y : الدخل

S : الذوق

μ : الخطأ العشوائي

1 – عبد القادر محمّد عبد القادر عطية ، الحديث في الاقتصاد القياسي ، الاسكندرية مصر ، الدار الجامعية 2005 ص 04

❖ **الاقتصاد القياسي و الإحصاء** : يمكن تعريف الإحصاء على أنه "مجموعة النظريات و الطرق العلمية التي تهدف إلى جمع البيانات التي يتم قياسها رقميا و عرضها و تحليلها لاستخلاص النتائج و من ثم استعمال هذه النتائج في التنبؤ أو التحقق من بعض الظواهر المدروسة" [1]، ومن خلال هذا التعريف نستطيع القول أن علم الإحصاء يرتكز على عنصرين أساسيين هما الإحصاء الوصفي و الإحصاء الرياضي، فالأول يهتم بجمع البيانات الخاصة بالمتغيرات الاقتصادية كالدخل، الاستهلاك، الاستثمار، ....إلخ ثم يقوم بتبويبها في جداول وعرضها بيانيا لوصف سلوك هذه المتغيرات عبر الزمن، أما الإحصاء الرياضي فهو يتكون من طرق القياس و التحليل كاستخدام الاحتمالات و التقديرات اللازمة التي تلائم طبيعة العلاقات الاقتصادية، ومثل هذه الطرق القياسية هي التي يستخدمها الاقتصاد القياسي في قياس العلاقات الاقتصادية باستخدام الأساليب الإحصائية.

3 – منهجية إعداد النموذج القياسي : إن الدراسة الإحصائية والقياسية للعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية تعتمد أساسا على النظرية الاقتصادية، حيث تعطينا هذه النظرية فكرة عن العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية، إلا أنها لا يمكن ان تعطي أرقاما ومؤشرات محددة لهذه العلاقة في زمن معين وفي واقع اقتصادي معين، مثلا :

- دراسة العلاقة بين الاستهلاك والدخل .
- دراسة العلاقة بين الاستثمار ومعدل الفائدة.
- دراسة العلاقة بين الاستهلاك والدخل والرقم القياسي للأسعار .

ويصعب التطرق الى التقنيات الاحصائية والقياسية دون معرفة الجانب النظري الذي تقوم عليه العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية، حيث نجد من بين هذه المتغيرات من يكون سببا والآخر يكون نتيجة، مع بقاء الظروف الأخرى على حالها، فمثلا:

- زيادة الدخل (سبب) يؤدي الى زيادة الانفاق الاستهلاكي (نتيجة).
- انخفاض معدل سعر الفائدة (سبب) يؤدي الى ارتفاع حجم الاستثمار (نتيجة).

1 – تومي صالح، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر 1999 ج 1 ص 07.

فالعلاقة السببية بين متغيرين يؤدي حتما الى وجود علاقة ارتباطية بينهما، بينما العكس ليس صحيحا دائما أي وجود علاقة ارتباطية تعني بالضرورة وجود علاقة سببية، فمثلا نجد على سبيل المثال وجود علاقة ارتباطية بين استهلاك بعض السلع وزيادة منح الطلبة، لكن في الواقع زيادة هذه المنح لا يؤثر بالضرورة على استهلاك هذه السلع.[1]

ولصياغة نموذج احصائي وقياسي اقتصادي يجب أن نرتكز على ثلاثة عناصر أساسية :

أ –**النظرية الاقتصادية** : فمن خلالها يتم تحديد الإطار النظري للنموذج أي تحديد العلاقة الجدلية بين المتغيرات الاقتصادية .

ب –**الرياضيات** : فمن خلالها يتم تحديد الشكل الرياضي المناسب للعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية في معادلة أو مجموعة من المعادلات السلوكية أو التعريفية أو التوازنية.

ج –**الإحصاء** : يمكننا من جمع وعرض وتحليل المعطيات باستخدام المؤشرات الاحصائية للوصول الى استخلاص النتائج والتنبؤ واتخاذ القرارات، حيث نجد بعض المفاهيم الأساسية التي تستخدم في هذه المرحلة :[2]

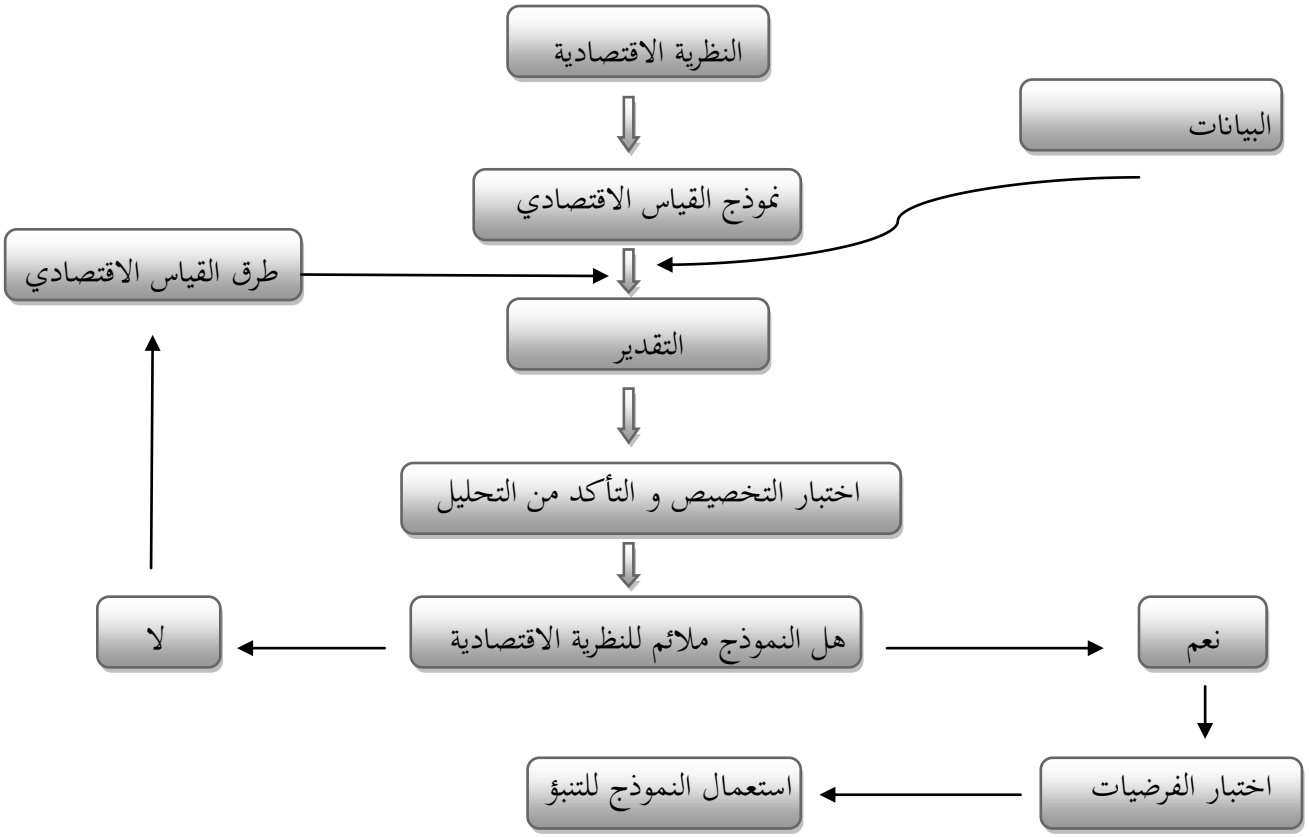
- **التقدير ESTIMATION**: هي عملية إدراك الواقع و صياغته في شكل نموذج رياضي يوضح العلاقة السببية أو الارتباطية بين المتغير التابع و المتغيرات المستقلة .
- **التوقع PREVISION**: يعتمد التوقع على النموذج الناتج عن التقدير، وهو يعني الحصول على المستويات المستقبلية للظاهرة المدروسة ، و عادة ما تعطى هذه القيمة المستقبلية في شكل قيمة وسطى ضمن مجال معين.
- **التنبؤ PREDICTION** : يهتم بالتغيرات الطارئة و بالظواهر الاقتصادية و الاجتماعية المعقدة مثلا كإكتشاف مصدر جديد للطاقة أو انهيار اقتصاد دولة معينة، بينما يقتصر التوقع على المؤشرات الكمية كما تم التطرق إليه سابقا.

و بالتالي يمكن تلخيص مراحل صياغة نموذج قياسي اقتصادي في الشكل التالي :

1 – جلاطو جيلالي، الاحصاء التطبيقي مع تمارين ومسائل محلولة، دار الخلدونية للنشر والتوزيع – الجزائر – 2009، ص 10.

2 – عبد العزيز شرابي ، طرق احصائية للتوقع الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية –الجزائر – 2000، ص 09.

الشكل رقم (1): مراحل صياغة نموذج قياسي اقتصادي



المصدر : تومي صالح ، مرجع سابق ص 07 .

و من خلال الشكل نلاحظ أهم المراحل التي يبنى عليها الاقتصاد القياسي ابتداء من النظرية الاقتصادية و توفر البيانات الرقمية، مرورا بمرحلة التقدير و التحليل و استخدام الأساليب الإحصائية اللازمة، لنصل في الأخير إلى مرحلة ملائمة النموذج و استخدامه في التنبؤ أو عدم ملائمته و إعادة استخدام الطرق القياسية لصياغة النموذج المصحح.

1 – بعض المفاهيم الأساسية الخاصة بالنماذج الإنحدارية : تحليل الانحدار من أكثر الأدوات المستعملة في التحليل القياسي فهو يهتم بوصف وتقييم العلاقة بين متغير (عادة يسمى المتغير التابع) و واحد أو أكثر لمتغيرات أخرى (تسمى عادة المتغيرات المفسرة أو المتغيرات المستقلة) ويرمز للمتغير المفسر بـ y والمتغيرات المفسرة بـ $x_1 \ x_2 \ x_3 \ldots x_n$.

وكلمة انحدار استخدمت من قبل Sir Francis Galton من إنجلترا و الذي كان يدرس العلاقة بين طول الأبناء وطول الآباء والذي لاحظ أن الطول يميل إلى المعدل ، مع أن الآباء الطوال يكون أبنائهم طوال والآباء القصار يميل أبنائهم لأن يكونوا قصارا، أي أن هناك ميل عند الأبناء للمعدل (انحدار نحو المعدل).

بالعودة إلى الرموز التي استخدمناها حيث رمزنا للمتغير المفسَر بـ Y والمتغيرات المفسرة بـ $X_1 \ X_2 \ X_3 \ldots X_n$ ، إذا كانت $k=1$ ، أي إن هناك متغير مستقل واحد فقط من المتغيرات المفسرة (x واحدة فقط) يعرف هذا بالانحدار البسيط (مثال : Y = المبيعات ، X = نفقات الإشهار)، وإذا كانت $k \geq 2$ آي أن هناك اكثر من x واحد و متغير مستقل، نحصل على ما يعرف بالانحدار المتعدد (مثال : Y = استهلاك الأسرة، X_1 = دخل الأسرة، X_2= الأصول المالية للأسرة، X_3 = حجم الأسرة.)

و إذا افترضنا أن المتغيرات X هي المتغيرات التي تؤثر على المتغير Y، فهناك العديد من المصطلحات التي يمكن أن نطلقها على X , Y ، فنجد :

– المتغيرات X يطلق عليها اسم : مُتنبأ، مفسر، مستقل، مسبب، خارجي، المتغير المتحكم.

– المتغيرات Y نجد (التسميات مقابلة مباشرة للأسماء الخاصة بالمتغير X): متَنبأ به ، مفَسر ، تابع ، متأثر ، داخلي ، المتغير الهدف.

كل من هذه المصطلحات يستخدم حسب الغرض من تحليل الانحدار فالمصطلح الأول يستخدم في عملية التنبؤ بينما المصطلحات الأخرى تستخدم في مناقشة الانحدار ، أما المصطلح خارجي وداخلي تستخدم فقط من قبل القياسيين، بينما المصطلح الأخير يستخدم في التجارب الخاصة بدراسة تأثير مسببات معينة على متغير مستهدف.

و تنقسم النماذج الانحدارية إلى عدة أنواع فنجد الانحدار الخطي و الانحدار غير الخطي، و الانحدار البسيط و الانحدار المتعدد، وتحدد درجة الخطية على أساس درجة العلاقة المرد قياسها، ففي حالة الانحدار الخطي تكون المعادلة الممثلة للعلاقة من الدرجة الأولى، وفي حالة غير الخطي تكون المعادلة من الدرجة غير الأولى (معادلة لوغارتمية أو أسية ....إلخ) ، وقبل تقدير العلاقة بين المتغير التابع و المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) يجب أولا البحث عن

أنسب الصيغ الرياضية التي تعبر عن هذه العلاقة و ذلك بالتعرف على الشكل البياني لها، فإذا كانت الصيغة المختارة غير خطية نقوم بتحويلها إلى صيغة خطية لإجراء عملية التقدير و ذلك باستخدام وحدات اللوغاريتم الطبيعي.
ويمكن ملاحظة مختلف الصيغ الرياضية في الجدول التالي و ذلك باستخدام معادلة ذات متغير مستقل واحد

الجدول رقم 01 : مقارنة بين الصيغ الرياضية لمختلف النماذج الانحدارية

نوع الصيغة	الصيغة غير الخطية	الصيغة الخطية
الصيغة الخطية	/	$Y = ß_0 + ß_1 X$
الصيغة العكسية	/	$Y = ß_0 + ß_1 (1/X)$
الصيغة التربيعية	/	$Y = ß_0 + ß_1 X + ß_2 X^2$
الصيغة اللوغارتمية المزدوجة	$Y = ß_0 + X^{ß1}$	$Ln\ Y = Ln\ ß_0 + ß_1 Ln\ X$
الصيغة نصف اللوغارتمية	$e^Y = e^{ß0} X^{ß1}$	$Y = ß_0 + ß_1 Ln\ X$
الصيغة الأسية	$Y = e^{ß0+ß1X}$	$Ln\ Y = ß_0 + ß_1 X$

المصدر : أموري هادي كاظم الحسناوي ، طرق القياس الاقتصادي ، عمان، دار وائل للنشر 2002، ص 60.

2- تقديم وصياغة وتقدير النموذج الخطي البسيط:

في هذه المرحلة سنتطرق الى أهم العناصر الأساسية التي من أجلها يتم بناء وصياغة نموذج خطي بسيط :

2-1- تعريف النموذج الخطي البسيط : هو عبارة عن علاقة دالية من الدرجة الأولى تربط متغيرين مأخوذين من واقع اقتصادي أو اجتماعي معين خلال فترة محددة، احدهما تابع نرمز له بـ Y و الثاني مستقل نرمز له بـ X بحيث يتم إيجاد معالم الدالة الخطية (ثوابتها) بعدة طرق أهمها طريقة المربعات الصغرى العادية.

و العلاقة الموجودة بين المتغيرين Y و X يمكن كتابتها من الشكل : [1]

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

1 - Rachid BENDIB, Econométrie, Théorie et applications (Alger OPU 2001) P 32

حيث تمثل: β ; α معاملات الانحدار، u : الخطأ العشوائي

2-2- تقدير معالم النموذج الخطي البسيط :

هناك عدة طرق لتقدير معاملات معادلة الانحدار أهمها طريقة المربعات الصغرى العادية (MCO) ، حيث تعتمد هذه الطريقة في الحصول على مقدرات الانحدار β،α بحيث يتم تصغير مجموع مربعات البواقي إلى أدنى قيمه لها وبعد ذلك يشرع في الحصول على المعاملات المقدرة حيث نرمز لـ (a) بالمعلمة المقدرة لـ α، و (b) بالمعلمة المقدرة لـ β .

وللقيام بعملية التقدير بطريقة المربعات الصغرى العادية يجب الارتكاز على بعض الفرضيات الأساسية منها :[1]

1 – أن تكون العلاقة خطية بين المتغير التابع والمتغير المستقل

2 – $E(u)=0$: وسـط التوزيع الاحتمالي الخاص بالمتغير العشوائي تساوي الصفر أي أن قيم u تتمركز حول الصفر.

3- $V(u) = \sigma^2$: تباين التوزيع الاحتمالي الخاص بالعناصر العشوائية u يساوي قيمه ثابتة وموجبة.

4- استقلالية الخطأ العشوائي: أي أنها مستقله عن بعضها $COV(u_i, u_j) = 0$

5- عدم وجود ارتباط بين المتغير المستقل والمتغير العشوائي $COV(X_i, u_j) = 0$

6- التوزيع الطبيعي للخطأ العشوائي $u_i \sim N(0, \sigma^2)$

1- John Johnston, Econometric methods, International student editions, 2 illustrée, McGraw-Hill, 1971

– تقدير معالم النموذج (تابع) :

تعتبر طريقة المربعات الصغرى العادية من أهم طرق التقدير حيث تهدف الى تصغير مربعات الفروق بين القيم الحقيقية والقيم المقدرة للمتغير التابع.

و انطلاقا من النموذج الخطي البسيط :

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

لدينا النموذج المقدر يكتب من الشكل :

$$\hat{Y}_i = a + bX_i$$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة الخاصة بالبواقي من الشكل التالي :

$$e_i = (Y_i - \hat{Y}_i)$$

$$e_i = Y_i - (a + bX_i)$$

ومن أجل أن تكون مجموع مربعات البواقي أصغر ما يمكن، يجب أن تكون المشتقات الجزئية على النحو التالي :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

- **تقدير المعلمة (a)** : لتقدير المعلمة (a) نرتكز على المشتقات الجزئية $\dfrac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial a} = 0$ حيث :

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial a} = \frac{\partial(\sum(Y_i - a - bX_i)^2}{\partial a} = 0$$
$$\Rightarrow -2\sum(Y_i - a - bX_i) = 0$$
$$\Rightarrow -2\sum e_i = 0$$
$$\Rightarrow \sum e_i = 0$$
$$\Rightarrow \sum(Y_i - a - bX_i) = 0$$
$$\Rightarrow \sum Y_i - \sum a - b\sum X_i = 0$$
$$\Rightarrow \sum Y_i - na - b\sum X_i = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\sum Y_i}{n} - \frac{na}{n} - b\frac{\sum X_i}{n} = 0$$
$$\Rightarrow \bar{Y} - a - b\bar{X} = 0$$
$$\boxed{\Rightarrow a = \overline{Y} - b\overline{X}}$$

- **تقدير المعلمة (b)** : لتقدير المعلمة (b) نرتكز على المشتقات الجزئية $\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial b} = 0$ حيث :

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial b} = \frac{\partial(\sum(Y_i - a - bX_i)^2}{\partial b} = 0$$
$$\Rightarrow -2X_i\sum(Y_i - a - bX_i) = 0$$

نقوم بقسمة الطرفين على (2-) :

$$\Rightarrow X_i\sum(Y_i - a - bX_i) = 0$$
$$\Rightarrow \sum(X_iY_i) - a\sum X_i - b\sum X_i^2 = 0$$

نقوم بتعويض قيمة (a) في المعادلة حيث : $a = \bar{Y} - b\bar{X}$

$$\Rightarrow \sum(X_iY_i) - \bar{Y}\sum X_i + b\bar{X}\sum X_i - b\sum X_i^2 = 0$$

نقوم بقسمة الطرفين على (n) :

$$\Rightarrow \frac{\sum(X_iY_i)}{n} - \frac{\bar{Y}\sum X_i + b\bar{X}\sum X_i}{n} - b\frac{\sum X_i^2}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum(X_iY_i)}{n} - \frac{\sum X_i}{n}(\bar{Y} - b\bar{X}) = b\frac{\sum X_i^2}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum(X_iY_i)}{n} - \bar{X}\bar{Y} + b\bar{X}^2 = b\frac{\sum X_i^2}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum(X_iY_i)}{n} - \bar{X}\bar{Y} = b(\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2)$$

$$\Rightarrow b = \frac{\frac{\sum(X_iY_i)}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{(\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2)}$$

نقوم بضرب الطرفين في (n) لنتحصل على قيمة المعلمة المقدرة (b) :

$$\Rightarrow b = \frac{\sum X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

وبالتالي يمكن كتابة النموذج الخطي البسيط المقدر من الشكل التالي :

$$\hat{Y}_i = a + bX_i$$

- **التقدير حول نقطة المتوسط :**

تعتمد هذه الطريقة في تقدير معلمات النموذج بالإعتماد على انحرافات قيم المتغير المستقل والتابع عن وسطيهما الحسابي، ويمكن كتابة قيمة المعلمة المقدرة (b) على النحو التالي : [1]

$$b = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

ويمكن البرهان على هذه المساواة على النحو التالي :

$$b = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum(X_i Y_i - X_i \bar{Y} - \bar{X} Y_i + \bar{X}\bar{Y})}{\sum(X_i^2 - 2X_i \bar{X} + \bar{X}^2)}$$

$$= \frac{\sum X_i Y_i - \sum X_i \bar{Y} - \bar{X}\sum Y_i + \sum \bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - 2\sum X_i \bar{X} + \sum \bar{X}^2}$$

$$= \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y} - \bar{X} n\bar{Y}_i + n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2}$$

$$b = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

اذا افترضنا أن :

$$x_i = (X_i - \bar{X})$$

$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

فيمكن كتابة قيمة المعلمة المقدرة (b) على النحو التالي :

1 - جلاطو جيلالي، الاحصاء التطبيقي مع تمارين ومسائل محلولة، دار الخلدونية للنشر والتوزيع – الجزائر – 2009، ص 16.

$$b = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

كما يمكن كتابة قيمة المعلمة المقدرة (b) بدلالة التباين المشترك COV(X,Y) والتباين V(X) على النحو التالي :

$$b = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}$$

3- المميزات العددية والخصائص الإحصائية للمعلمات المقدرة :

3-1- المميزات العددية للمعلمات المقدرة : في هذه الحالة نقتصر على التوقع الرياضي والتباين للمعلمات المقدرة أي : E(a)، E(b)، V(a) ، V(b)K ، مع العلم أن كل من (a) و (b) هي مقدرات (α) و (β).

ودون التطرق الى البراهين الرياضية الخاصة بكل من خطوات الوصول الى نتائج التوقع الرياضي والتباين لكل من المعلمات المقدرة، وفي هذه الحالة نجد المميزات العددية للمعلمات المقدرة على النحو التالي : [1]

- $E(b) = \beta$ ✓
- $V(b) = \frac{\delta^2}{\sum x_i^2}$ ✓
- $E(a) = \alpha$ ✓
- $V(a) = \delta^2(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2})$ ✓
- $COV(a,b) = -\frac{\delta^2 \bar{X}}{\sum x_i^2}$ ✓

كما نستطيع القول أن من بين المميزات العددية للمعلمات المقدرة a و b نجد أنها تتبع التوزيع الطبيعي :

$$a \longrightarrow N(E(a), V(a))$$

$$b \longrightarrow N(E(b), V(b))$$

[1] - John Johnston, Econometric methods , Op cit, P 30

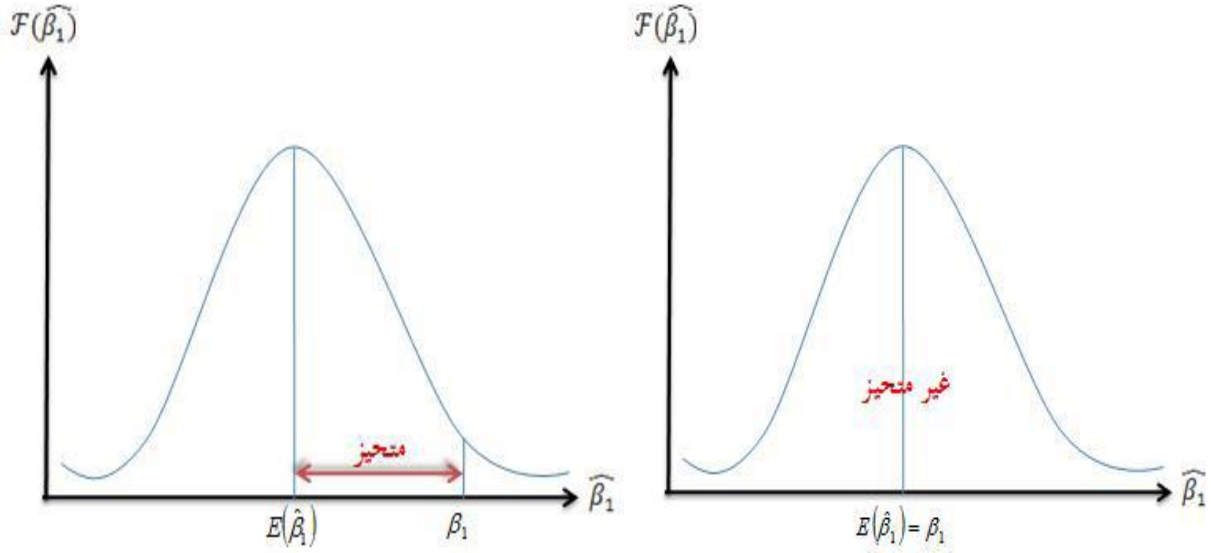
3-2- الخصائص الإحصائية للمعلمات المقدرة : من بين أهم الخصائص الإحصائية التي تتميز بها مقدرات المربعات الصغرى العادية نجد:

أ) **عدم التحيز**: نقول أن مقدرات (م ص ع) هي مقدرات لديها خاصية عدم التحيز إذا كانت على النحو التالي:

- ✓ a مقدرة غير متحيزة للمعلمة α أي أن : $E(a) = \alpha$ أو بمعنى آخر متوسط $a = \alpha$ ، إذا جمعت عينات كثيرة وفي كل عينه نحسب a يتم أخذ المتوسط، ذلك المتوسط نظريا يجب أن يتساوى مع المعلمة الحقيقية.
- ✓ و نفس الشيء بالنسبة لـ b مقدرة غير متحيزة للمعلمة β إذا كان $E(b) = \beta$ ، أي أن توقع b يجب أن يساوي المعلمة الحقيقية بمعنى آخر متوسط قيم b تساوي القيمة الحقيقية للمعلمة β.

ويوضح الشكل التالي حالة المقدار غير المتحيز والمقدار المتحيز :

الشكل رقم (02) : المقدار المتحيز والمقدار غير المتحيز



المصدر : عبد القادر محمّد عبد القادر عطية، مرجع سبق ذكره، ص179 .

ب) الكفاءة (أدنى تباين): هذه الخاصية لها أهمية بالغة في الاقتصاد القياسي لأن أدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، حيث هناك علاقة عكسية بين التباين ودقة القياسات كلما زاد التباين كلما انخفضت دقة القياسات وكلما قل ارتفعت دقة القياسات، و بالتالي فان مقدرات (م ص ع) a و b هي مقدرات تمتلك أدني تباين مقارنة بمقدرات أخرى تقاس بطريقه مختلفة عن (م ص ع)، وبالتالي نستطيع القول أن المقدار الكفؤ هو ذو أصغر تباين

أي: $V(a) \longleftarrow Min$

$V(b) \longleftarrow Min$

ج) الإتساق : نقول أن المعلمات المقدرة هي معلمات متسقة إذا تحققت مايلي :

$Lim\ E(a)= \alpha$ ، $Lim\ E(b)= \beta$ عندما $n \longleftarrow \infty$.

وتباين المعلمة المقدرة يقترب الى الصفر أي :

$Lim\ V(a)= 0$ ، $Lim\ V(b)= 0$ عندما $n \longleftarrow \infty$.

وبالتالي نستطيع القول أن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (M.C.O) في التقدير راجع الى أن مقدرها هو أفضل مقدر خطي غير متحيز ومبررات استخدامها راجع الى الخصائص المذكورة سابقا والمتمثلة في عدم التحيز والكفاءة والاتساق.

4- دراسة صلاحية النموذج : لدراسة صلاحية النموذج نرتكز على الأدوات الاحصائية التالية :

- معامل الإرتباط (R)
- معامل التحديد (R^2)
- إختبار معنوية المعلمات المقدرة (إختبار ستيودنت (Test de Student)

4-1- معامل الإرتباط (r) : قبل التطرق الى معامل الارتباط سنقوم بتعريف الارتباط بصفة عامة والذي هو عبارة عن تعيين طبيعة وقوة العلاقة بين متغيرين أو عدمها، أما معامل الارتباط فهو المؤشر الذي يتم من خلاله تعيين طبيعة وقوة هذه العلاقة بين المتغيرين.

ويمكن أن نجد نوعين من الإرتباط بين المتغيرين :

أ) الإرتباط الموجب (الطردي) : وهو عبارة عن علاقة بين متغيرين (x,y) بحيث إذا تغير أحد المتغيرين فإن الآخر يتبعه في نفس الإتجاه .

ب) الإرتباط السالب (العكسي) : وهو عبارة عن علاقة بين متغيرين (x,y) بحيث إذا تغير أحد المتغيرين فإن الآخر يتبعه في الاتجاه المعاكس .

4-1-1- قياس الإرتباط : لقياس الارتباط نستخدم معامل الارتباط والذي يرمز له بالرمز (r) والذي هو عبارة عن مقياس رقمي يقيس قوة الارتباط بين متغيرين حيث تتراوح قيمته ما بين : $(+1)$ و (-1)، وتدل إشارة المعامل الموجبة على العلاقة الطردية أما الاشارة السالبة فتدل على العلاقة العكسية.

والجدول التالي يوضح أنواع الارتباط واتجاه العلاقة لكل نوع :

الجدول رقم (02) : قياس الارتباط

قيمة معامل الارتباط	التفسير
+1	إرتباط طردي تام
من 0.70 الى غاية 0.99	إرتباط طردي قوي
من 0.50 الى غاية 0.69	إرتباط طردي متوسط
من 0.01 الى غاية 0.49	إرتباط طردي ضعيف
0	لا يوجد ارتباط

المصدر : من إعداد الباحث وبالارتكاز على المعلومات المستخرجة من المرجع الخاص ب : عايد كريم عبدعون الكناني، مقدمة في الإحصاء، ktab INC. 2014 ، ص 17

ملاحظة : وما قيل عن الارتباط الطردي ينطبق على الارتباط العكسي (مع وضع اشارة سالبة).

ولتحديد أسلوب القياس نجد أيضا أه هناك علاقة بين نوع المعطيات ومعامل الإرتباط المستخدم حسب الجدول التالي:

الجدول رقم (03) : قياس الارتباط من خلال نوع البيانات

نوع المتغير الأول	نوع المتغير الثاني	معامل الإرتباط الأنسب
كمي	كمي	بيرسون (Pearson)
رتبي (الزمن)	كمي	سبيرمان (Spearman)
كيفي	كيفي	سبيرمان (Spearman)

المصدر : من إعداد الباحث وبالارتكاز على المعلومات المستخرجة من المرجع الخاص ب : عايد كريم عبدعون الكناني، مرجع سبق ذكره ص 25

4-1-2- معامل الإرتباط (r) لبيرسون (Pearson) : هو من أكثر معاملات الارتباط استخداما وخاصة في القياس الكمي، ومستوى القياس المطلوب عند تطبيق معامل بيرسون (Pearson) للإرتباط أن تكون بيانات كلا المتغيرين (الظاهرتين المدروستين) بيانات كمية.

ويمكن حساب معامل بيرسون (Pearson) بدلالة بيانات المتغيرين (x,y) وباستخدام الصيغة التالية :

$$r(x,y) = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2}\sqrt{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

$$r(x,y) = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x^2{}_i}\sqrt{\sum y^2{}_i}}$$

حيث :

$$x_i = (X_i - \bar{X})$$
$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

كما يمكن كتابة معامل الرتباط (r) بدلالة معامل التقدير (b) على النحو التالي :

لدينا :

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x^2{}_i}$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{b\frac{\sum x_i y_i}{\sum y^2{}_i}}$$

4-2- معامل التحديد ($\mathbf{R^2}$) : وهو عبارة عن معامل يقيس القدرة التفسيرية للنموذج أو بعبارة أخرى هو عبارة عن نسبة تفسيرية تبين مدى تفسير المتغير المستقل للمتغير التابع، ويعتبر هذا المعامل جد مهم في دراسة صلاحية النموذج المقدر، ومراحل حسابه ترتكز على تحديد مجموع المربعات : [1]

- مجموع المربعات الكلية (SCT).
- مجموع المربعات التفسيرية (SCE).
- مجموع مربعات البواقي (SCR).

ولتحديد مجموع المربعات لدينا :

$$e_i = y_i - bx_i$$

حيث :

$$x_i = (X_i - \bar{X})$$

$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

$$(e_i)^2 = (y_i - bx_i)^2$$

$$e_i^{\,2} = y_i^{\,2} - 2bx_i y_i + b^2 x_i^{\,2}$$

$$\sum e_i^{\,2} = \sum y_i^{\,2} - 2b\sum x_i y_i + b^2 \sum x_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \sum y_i^{\,2} = 2b\sum x_i y_i - b^2 \sum x_i^{\,2} + \sum e_i^{\,2}$$

ولدينا :

$$b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x^2{}_i}$$

1 - جلاطو جيلالي، مرجع سبق ذكره، ص 31.

وبالتالي يصبح لدينا :

$$\sum y_i^{\,2} = 2\frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^{\,2}} - \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^{\,4}} . \sum x_i^{\,2} + \sum e_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \sum y_i^{\,2} = 2\frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^{\,2}} - \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^{\,2}} + \sum e_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \sum y_i^{\,2} = \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^{\,2}} + \sum e_i^{\,2}$$

$$\Rightarrow \sum y_i^{\,2} = b\sum x_i y_i + \sum e_i^{\,2}$$
$$\Rightarrow SCT = SCE + SCR$$

ولدينا معامل الإرتباط يكتب من الشكل التالي :

$$r(x,y) = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x^2{}_i}\sqrt{\sum y^2{}_i}}$$

وبالتالي :

$$r^2(x,y) = \frac{(\sum x_i y_i)(\sum x_i y_i)}{\sum x^2{}_i \sum y^2{}_i}$$

$$\Rightarrow r^2 = b\frac{(\sum x_i y_i)}{\sum y^2{}_i}$$

$$\Rightarrow r^2 \sum y^2{}_i = b\sum x_i y_i$$

ومن خلال المعادلة الخاصة بمجموع المربعات الكلية (SCT=SCE+SCR) تصبح لدينا المعادلة من الشكل التالي والتي من خلالها يتم تحديد معامل التحديد (R^2):

$$\sum y_i^2 = b\sum x_i y_i + \sum e_i^2$$
$$\Rightarrow \sum y_i^2 = r^2 \sum y_i^2 + \sum e_i^2$$
$$\Rightarrow r^2 = \frac{\sum y_i^2 - \sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$
$$\Rightarrow r^2 = \frac{SCT - SCR}{SCT}$$
$$\Rightarrow \boxed{r^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} = \frac{SCE}{SCT}}$$

4-3- إختبار معنوية المعلمات المقدرة بالنسبة للنموذج الخطي البسيط : في هذه الحالة نستخدم اختبار ستيودنت (Student) لقياس معنوية المعلمات المقدرة .

4-3-1- إختبار ستيودنت (Test de Student) : يبين اختبار ستيودنت (T) مدى معنوية المعلمات المقدرة، ولهذا الإختبار قيمتين :

- قيمة محسوبة نرمز لها بالرمز (t_c)
- قيمة مجدولة نرمز لها بالرمز (t_{tab})

أ) **القيمة المحسوبة (t_c)** : وتعتمد على قيمة المعلمة المقدرة a و b وانحرافهما المعياري، ونقوم بحساب (t_c) على النحو التالي :

$$t_{c(a)} = \frac{a}{\delta_a}$$

$$t_{c(b)} = \frac{b}{\delta_b}$$

حيث من بين المميزات العددية للمعلمتين a وb نجد :

$$\delta_a = \sqrt{V(a)}$$

$$\Rightarrow V(a) = V(\varepsilon_i)(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{V(X)}$$

$$\delta_b = \sqrt{V(b)}$$

$$\Rightarrow V(b) = \frac{V(\varepsilon_i)}{\sum x_i^2} = \frac{V(\varepsilon_i)}{V(X)}$$

حيث : $V(\varepsilon_i) = \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}$

أ) **القيمة المجدولة (t_{tab})** : وتعتمد على مستوى المعنوية وعدد درجات الحرية:

– مستوى المعنوية : فهو يحدد من طرف الباحث حسب أهمية الدراسة ولدينا عادة مستوى معنوية (α) تحدد ب : 1 % ، 5 % ،10 % ويسمى باحتمال الخطأ، أما الإحتمال المعاكس ونرمز له بالرمز ($1-\alpha$) فيسمى بمستوى الثقة (99 % ، 95 % ،90 %) وعادة ما تتم الدراسات الاحصائية عند مستوى معنوية α = 5% اي مستوى ثقة يقدر بـ $(1-\alpha)= 95\%$.

– درجة الحرية : فهي عبارة عن الفرق بين حجم العينة وعدد المعلمات المقدرة ($n-k$) أي حجم العينة مطروح منه عدد القيود أو المعالم التي يتم تقديرها .

مثال : ليكن لدينا 03 أعداد شرط أن يكون مجموعها يساوي 10 وبالتالي الباحث له الحق في اختيار الرقم الأول والثاني (مثلا : 3+2) ولكن الرقم الأخير يجب ان يكون يساوي 5 (قيد) ، وبالتالي لدينا حرية اختيار رقمين فقط (2) ، اي درجة الحرية تساوي حجم العينة (أعداد $n=3$) مطروح منه عدد القيود (في هذا المثال لدينا قيد واحد فقط (1) وبالتالي : درجة الحرية هي $n-1 = 3-1= 2$

4–3–2– إختبار الفرضيات الخاص بمعنوية المعلمات المقدرة : إن اختبار الفرضيات في الاستدلال الاحصائي ينتج عنه اتخاذ القرار (القبول أو الرفض) بالنسبة للفرضية، ويرمز للفرضية الاحصائية بالرمز (H) حيث لدينا :

H_0: فرضية العدم (الصفرية)

H_1: الفرضية البديلة

ومن أجل القيام باختبار الفرضيات نحتاج الى الخطوات التالية :

- ✓ تحديد الفرضيات
- ✓ تحديد قاعدة القرار
- ✓ حساب القيمة الإسمية (t_c)
- ✓ حساب القيمة المجدولة (t_{tab})
- ✓ إتخاذ القرار

– **تحديد الفرضيات** : صياغة الفرضيات الخاصة بدراسة معنوية المعلمات المقدرة تكون من الشكل التالي والخاصة بالثابت والميل :

$$\begin{cases} H_0 : \alpha = 0 \; ; \; \beta = 0 \\ H_1 : \alpha \neq 0 \; ; \; \beta \neq 0 \end{cases}$$

– **تحديد قاعدة القرار** : في هذه الحالة نرتكز على دالة التوزيع لستيودنت والتي تعتبر دالة متناظرة وبالتالي تحديد منطقة الرفض والقبول يكون من الشكل التالي :

- إذا كانت: $t_{tab} < /t_c/$ ⟵ نرفض H_0 ونقبل H_1
- إذا كانت: $t_{tab} > /t_c/$ ⟵ نقبل H_0 ونرفض H_1

– **حساب القيمة الإسمية (t_c)** : لحساب القيمة الاسمية لكل من المعلمتين المقدرتين a و b نستخدم العلاقة الحسابية التي تطرقنا اليها سابقا على النحو التالي :

$$t_{c(a)} = \frac{a}{\delta_a}$$

$$t_{c(b)} = \frac{b}{\delta_b}$$

– **حساب القيمة الجدولية (t_{tab})** : وهي قيمة يتم استخراجها من الجول الإحصائي الخاص بتوزيع ستيودنت حيث:

$$t_{tab} = t_{(\alpha/2 \; ; n-2)}$$

– **إتخاذ القرار** : وبالارتكاز على قاعدة القرار حيث إذا كانت :

- إذا كانت: $t_{tab} < /t_c/$ ⟵ نرفض H_0 ونقبل H_1 أي نقبل فرضية $H_1 : \alpha \neq 0 \; ; \; \beta \neq 0$

وبالتالي نقول أن المعلمات المقدرة لها معنوية (النموذج مقبول احصائيا) .

- إذا كانت: $t_{tab} > /t_c/$ ⟵ نقبل H_0 ونرفض H_1 أي نقبل فرضية $H_0 : \alpha = 0 ; \beta = 0$ وبالتالي نقول أن المعلمات المقدرة ليس لها معنوية (النموذج غير مقبول احصائيا) .

5 – التنبؤ : بعد القيام بالمراحل السابقة الذكر والخاصة بصياغة وبناء نموذج خطي بسيط والقيام بعملية التقدير ودراسة صلاحية النموذج المقدر، تأتي في المرحلة الأخيرة عملية التنبؤ وذلك بايجاد قيم المتغير التابع Y بتغيير قيم المتغير المستقل X ، واذا ارتكزنا على النموذج الخطي البسيط ولنفترض أننا نعرف القيمة المستقبلية لـX في فترة التنبؤ ونرمز لها بالرمز X_{t+h} فاذا فرضنا أن البناء الهيكلي للمعادلة لا يتغير في المستقبل، تكون قيمة المتغير التابع Y في هذه الفترة $t+h$ كما يلي :[1]

$$Y_{t+h} = \alpha + \beta X_{t+h} + u_{t+h}$$

حيث h يسمى أفق التنبؤ و Y_{t+h} يعبر عن التنبؤ النظري و t تعبر عن حجم العينة $(t=1,2.....T)$ ومن خلال هذا النموذج المستخدم في التنبؤ بالقيمة Y يجب الإعتماد على المعلمات المقدرة لـ α و β وهما على التوالي a و b لكي نقوم بتقدير القيمة Y_{t+h} حيث أن هذه القيمة هي وسط Y الموافق لـ Y_{t+h} أي :

$$E(Y_t) = \alpha + \beta X_t$$
$$E(Y_{t+h} X_{t+h}) = \alpha + \beta X_{t+h}$$

بالإضافة الى أن الخطأ العشوائي u_{t+h} هو متغير عشوائي غير مشاهد، ولهذا بعد تقدير α و β و تقدير القيمة Y_{t+h} حيث أن هذه القيمة هي وسط Y الموافق لـ Y_{t+h} فيكون المقدر الطبيعي للتنبؤ من الشكل التالي :

$$\hat{Y}_t(h) = a + bX_{t+h}$$

ويعتبر هذا المقدر والذي يسمى بالتنبؤ التقديري هو مقدر غير متحيز لـ $E(Y_{t+h} X_{t+h})$ ويسمى بأفضل تنبؤ خطي غير متحيز .

1 – محمد شيخي، دروس وأمثلة محلولة في الإقتصاد القياسي ، جامعة قاصدي مرباح (ورقلة) ، الطبعة الأولى 2010-2011، ص 22.

1- تعريف نموذج الإنحدار الخطي المتعدد: في الواقع الاقتصادي، لا يمكن الإستعانة بالنموذج الذي يحتوي على متغيرين احداهما تابع والآخر مستقل لتحليل ظاهرة اقتصادية، حيث أن هذه الأخيرة لا تفسر فقط بمتغير مستقل واحد، وإنما يجب إدماج جميع المحددات أو العوامل المؤثرة في الظاهرة لكي تكون الدراسة أكثر شمولية.

ويعتبر نموذج الإنحدار الخطي المتعدد (ويسمى أحيانا بالنموذج الخطي العام) امتدادا للنموذج الخطي البسيط، حيث أنه يتضمن أكثر من متغير مستقل واحد، ففي حالة النموذج الخطي البسيط كان الأمر يعتمد على متغيرين فقط احداهما تابع والآخر مستقل، أما في حالة النموذج المتعدد فيتضمن متغير تابع والعديد من المتغيرات المستقلة (أكثر من متغير مستقل واحد) .

2- الصياغة الرياضية للنموذج الخطي المتعدد : يرتكز النموذج الخطي المتعدد (العام) على افتراض وجود علاقة خطية بين المتغير التابع Y ومجموعة من المتغيرات المستقلة $X_1 ,X_2,.....X_K$

و العلاقة الموجودة بين المتغير التابع Y و ومجموعة من المتغيرات المستقلة $X_1 ,X_2,.....X_K$

ويعبر عن هذه العلاقة بالنسبة لـn من المشاهدات وk من المتغيرات المستقلة بالشكل الآتي : [1]

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ...+ \beta_k X_{ik} + u_i$$

حيث:

Y_i : يمثل المتغير التابع

$X_{i1} ,X_{i2},.....X_{iK}$ تمثل المتغيرات المستقلة

$\beta_0، \beta_1، ..... \beta_k$ تمثل معالم النموذج.

ui هو عبارة عن الخطأ العشوائي

وفي واقع الأمر فان هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات كالتالي :

[1] - محمد شيخي، مرجع سبق ذكره، ص 27.

$$Y_1 = B_0 + B_0X_{11} + B_2X_{12} + \ldots + B_KX_{1K} + U_1$$
$$Y_2 = B_0 + B_1X_{21} + B_2X_{22} + \ldots B_KX_{2K} + U_2$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$Y_n = B_0 + B_1X_{n1} + B_2X_{n2} + \ldots + B_KX_{nK} + U_n$$

هذه المعادلة تتضمن $(k+1)$ من المعلومات المطلوب تقديرها علما بان الحد الأول منها (B_0) يمثل الحد الثابت وهذا ما يتطلب اللجوء إلى المصفوفات لتقدير تلك المعلمات، عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات من الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1K} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2K} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \ldots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ . \\ B_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ . \\ U_n \end{bmatrix}$$

وباختصار يمكن كتابة هذا النظام على الشكل المصفوفي التالي : $Y = XB + U$

حيث :

Y: متجه عمودي أبعاده $(n\times1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع .

X : مصفوفة أبعادها $(n \times k+1)$ تحتوي على مشاهدات المتغيرات المستقلة ويحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح ليمثل الحد الثابت .

B: متجه عمودي أبعاده $(1\times (K + 1))$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها .

U: متجه عمودي أبعاده $(1 \times n)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية .

3 – فرضيات النموذج الخطي المتعدد : عند استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (M.C.O) في تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي المتعدد، فإنه يجب توفر الافتراضات الآتية :[1]

1 - John Johnston, Econometric methods, Op cit, P 76.

✓ القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ العشوائي تساوي صفرا أي أن $E(U_i) = 0$:

$$E(U_i) = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(U_1) \\ E(U_2) \\ . \\ E(U_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

✓ تباين العناصر العشوائية ثابت وهي فرضية تجانس التباين (Homoscedasticity) والتباين المشترك بينها يساوي صفرا أي أن :

$$E(UU') = \sigma^2 I_n$$

$$E(UU') = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ U_n \end{bmatrix} [U_1 \quad U2 \quad ... \quad U_n]$$

$$= E\begin{bmatrix} U_1^2 & U_1U_2 & ... & U_1U_n \\ U_2U_1 & U_2^2 & ... & U_2U_n \\ . & . & . & . \\ U_nU_1 & U_nU_2 & ... & U_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(U_1^2) & E(U_1U_2) & .... & E(U_1U_n) \\ E(U_2U_1) & E(U_2^2) & .... & E(U_2U_n) \\ . & . & ..... & . \\ E(U_nU_1) & E(U_nU_2) & .... & E(U_n^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{var}(U_1) & Cov(U_1U_2) & .... & Cov(U_1U_n 0 \\ Cov(U_2U_1) & Var(U_2) & .... & Cov(U_2U_n) \\ . & . & .... & . \\ Cov(U_nU_1) & Cov(U_nU_2) & .... & Var(U_n) \end{bmatrix}$$

$$\text{var}(Ui) = E(U_i^2) = \sigma^2$$

$$\text{Cov}(U_iU_j) = E(U_iU_j) = 0 \text{ , I \# j}$$

$$E(UU') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & ..... & 0 \\ 0 & 0 & ..... & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

حيث أن : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & 1 & ..... & 0 \\ 0 & 0 & ..... & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 In$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك لحد الخطأ العشوائي (Ui) ، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين قيم U بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى واسفل القطر) مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك والترابط بين قيم U_i .

✓ ليس هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة، كما أن عدد المشاهدات يجب أن يكون أكبر من عدد المعلمات المطلوب تقديرها وهي الحالة التي تلغي الإرتباط الخطي بين المتغيرات المستقلة

أي: $R(x) = k + 1 < n$

حيث أن: (r) رتبة مصفوفة البيانات ، (x) عدد المتغيرات المستقلة (k) مضاف اليه الواحد (1) الحد الثابت وهي اصغر من عدد المشاهدات (n) .

وهذه الفرضية ضرورية جدا لضمان أيجاد معكوس المصفوفة ($x'x$) , إذ أن انتفاء هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) اقل من (K+1) وبالتالي فان رتبة ($x'x$) التي تستخدم في الحصول على مقدرات M.C.O بدورها اقل من (K+1) ولايمكن أيجاد معكوسها بسبب ما يسمى بمشكل الارتباط الخطي المتعدد وبالتالي لايمكن الحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية .

4- تقدير معالم النموذج الخطي المتعدد : وفي حالة توفر الفرضيات المذكورة أعلاه يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير معلمات النموذج الخطي المتعدد، وعلى هذا الأساس نرتكز على الصياغة الأولى للنموذج الخطي المتعدد من الشكل : [1]

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots\ldots + \beta_k X_{ik} + u_i$$

ولغرض التقدير يمكن كتابة هذه المعادلة بصيغتها التقديرية باستخدام متغيرين مستقلين بالاضافة الى الثابت كآلاتي :

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{i1} + \hat{B}_2 X_{i2}$$

والهدف هو الحصول على قيم كل من $\hat{B}_0, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ التي تجعل مجموع مربعات الانحرافات اقل ما يمكن ، أي تصغير القيمة $\sum e_i^2$ (مبدأ المربعات الصغرى) إلى اقل قيمة ممكنة أي :

$$\text{Min} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

$$e_i = Y_I - \hat{Y}_i$$

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_I - \hat{Y}_i)^2$$

ومن خلال تعويض $\hat{Y}_i$ بما يساويها واخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى $\hat{B}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_0$ ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})^2$$

- بالنسبة لـ $\hat{B}_0$:

$$\frac{\delta e_i^2}{\delta \hat{B}_0} = 2\sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-1) = 0$$

$$= -2 \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

بالقسمة على (-2) وفك القوس نتحصل على :

$$\sum Y_i - n\hat{B}_0 - \hat{B}_1 \sum X_{i1} - \hat{B}_2 \sum X_{i2} = 0$$

$$\boxed{\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_{i1} + \hat{B}_2 \sum X_{i2}}$$

1 - محمد شيخي، مرجع سبق ذكره، ص 29.

– بالنسبة لـ $\hat{B}_1$:

$$\frac{\delta \sum e_i^2}{\delta \hat{B}_1} = 2\sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-X_{i1}) = 0$$

$$= -2\sum X_{i1}(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

بالقسمة (-2) وفك القوس نحصل على :

$$\sum X_{i1} Y_i - \hat{B}_0 \sum X_{i1} - \hat{B}_1 X_{i1}^2 - \hat{B}_2 \sum X_{i1} x_{i2} = 0$$

$$\boxed{\sum X_{i1} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i1} + \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2}}$$

– بالنسبة لـ $\hat{B}_2$:

$$\frac{\delta \sum e_i^2}{\delta \hat{B}_2} = 2\sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-X_{i2}) = 0$$

$$-2\sum X_{i2}(Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

بالقسمة على (-2) وفك القوس , نحصل :

$$\sum X_{i2} Y_i - \hat{B}_0 \sum X_{i2} - \hat{B}_1 \sum X_{i1} X_{i2} - \hat{B}_2 \sum X_{i2}^2 = 0$$

$$\boxed{\sum X_{i2} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i2} + \hat{B}_1 \sum X_{i1} X_{i2} + \hat{B}_2 \sum X_{i2}^2}$$

ويمكن حل هذه المعادلات الطبيعية الثلاث والتي تستخدم في تقدير المعالم الثلاثة المجهولة $\hat{B}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_0$ بإحدى الطرق الآتية : [1]

أولا : طريقة المحددات : ويمكن أن تحل هذه المعادلات بواسطة قاعدة "كرا يمر " للحصول على قيم $\hat{B}_K$ من المعلمات وعلى النحو آلاتي :

1 - John Johnston, Econometric methods, Op cit, P 79.

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_{i1} + \hat{B}_2 \sum X_{i2}$$

$$\sum X_{i1}Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i1} + \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum X_{i1}X_{i2}$$

$$\sum X_{i2}Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i2} + \hat{B}_1 \sum X_{i2} + \hat{B}_2 \sum X_{i2}^2$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{i1}Y_i \\ \sum X_{i2}Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه يمكن أيجاد المحددات آلاتية :

$$|\mathrm{D}| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2}Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

$$|\mathrm{N}_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_1 & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}Y_i & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

$$|\mathrm{N2}| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum Y_i \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}Y_i \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}Y_i \end{vmatrix}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|N_1|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}Y_i & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2}Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}$$

$$\hat{B}2 = \frac{|N_2|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2}Y_i & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2}Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}$$

أما بالنسبة ل $\hat{B}_0$ فيتم الحصول عليه عن طريق :

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}_1 - \hat{B}_2 \overline{X}_2$$

ثانيا : طريقة الانحرافات : ويمكن تقدير معاملات الانحدار المتعدد باستخدام أسلوب الانحرافات أو ما يسمى بالمتوسطات ، أي انحرافات القيم الأصلية عن وسطها كآلاتي :

ولهذا الغرض نأخذ نموذج يحتوي متغيرين مستقلين X_1 و X_2 :

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{i1} + \hat{B}_2 X_{i2} + e_i$$

وبأخذ المتوسط لهذه المعادلة :

$$\overline{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X}_1 + \hat{B}_2 \overline{X} 2 + \overline{e}_i \ , \ \overline{e}_i = 0$$

$$\hat{Y}_i - \overline{Y} = \hat{B}_1 (X_{i1} - \overline{X}_1) + \hat{B}_2 (X_{i2} - \overline{X}_2) + e_i$$
$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 X_{i1} + \hat{B}_2 X_{i2} + e_i$$

اثبات أن $\overline{\hat{Y}_i} = \overline{Y}$:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

وبادخال المجموع على طرفي المعادلة اعلاه نتحصل على :

$$\sum \hat{Y}_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

وبالقسمة على n :

$$\frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \hat{B}_0 \frac{n}{n} + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$
$$\overline{\hat{Y}_i} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X}_i \quad .....(*)$$
$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}_i$$
$$\overline{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X}_1 .....(**)$$

وبطرح المعادلة (*) من المعادلة (**) نتحصل على :

$$\overline{\hat{Y}} - \overline{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X}_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 \overline{X}_i$$

وبعد الاختصار في الطرف الايمن نتحصل على :

$$\overline{\hat{Y}_i} - \overline{Y} = 0$$

ومنها يكون :

$$\overline{\hat{Y}_i} = \overline{Y}$$

ولدينا :

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{i1} + \hat{B}_2 X_{i2} + e_i$$
$$(i=1,2,3,\ldots\ldots,n)$$

وفي واقع الأمر فان المعادلة أعلاه هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها n معادلة تكون نظام المعادلات كالتالي :

$$Y_1 = B_1 X_{11} + B_2 X_{12} + \ldots\ldots\ldots + B_K X_{1K} + e_1$$

$$Y_2 = B_1 X_{21} + B_2 X_{22} + \ldots\ldots\ldots + B_K X_{2K} + e2$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = B_1 X_{n1} + B_2 X_{n2} + \ldots\ldots\ldots + B_K X_{nK} + en$$

ويمكن التعبير عن المعادلات أعلاه في هيئة مصفوفة كما يلي :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1K} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2K} \\ . & . & . & . \\ X_{n1} & X_{n2} & \ldots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ . \\ \hat{B}_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ e_n \end{bmatrix}$$

حيث يمكن التعبير عن ذلك بصيغة المصفوفات :

$$Y = x\ \hat{B} + e$$

حيث أن :

Y: متجه عمودي أبعاده ($n \times 1$) يحتوي على انحرافات قيم المتغير التابع .

X: مصفوفة أبعادها ($n \times k - 1$) تحتوي على انحرافات قيم المتغيرات المستقلة حيث أنها لا تتضمن العمود الأول الذي يمثل الحد الثابت، حيث يمكن بذلك استخراج الحد الثابت $\hat{B}_0$ من خارج المصفوفة باستخدام القانون آلاتي :

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}_1 - \hat{B}_2 \overline{X}_2$$

$\hat{B}$: متجه عمودي أبعاده ($K - 1 \times 1$) تحتوي على المعالم المجهولة .

E : متجه عمودي أبعاده ($n \times 1$) يحتوي على البواقي .

ويمكن التوصل الى مصفوفة الانحرافات باتباع الخطوات التالية :

باعادة كتابة المعادلة على النحو الاتي :

$$e_i = y_i - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}$$

وكما تطرقنا سابقا حيث أن افضل طريقة للحصول على اصغر قيمة ممكنة للانحرافات تتم بواسطة تربيعها وبجعل مجموع مربعاتها اصغر ما يمكن ، وبأخذ المشتقة الجزئية لها بالنسبة لكل من $\hat{B}_1, \hat{B}_2$ ومساواتها بالصفر نحصل على :

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2})^2$$

$$\frac{\delta \sum e_i^2}{\delta \hat{B}_1} = 2\sum (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-x_{i1}) = 0$$

$$= -2\sum X_{i1}(y_i - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

وبالقسمة على (-2) وفك القوس نحصل على :

$$\sum X_{i1} y_i - \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 - \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2} = 0$$

$$\sum x_{i1} y_i = \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2}$$

$$\frac{\delta \sum e_i^2}{\delta \hat{B}_2} = 2\sum (y_i - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-X_{i2}) = 0$$

$$= -2\sum x_{i2}(y_i - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

وبالقسمة على (-2) وفك القوس نحصل على :

$$\sum X_{i2} y_i - \hat{B}_1 \sum X_{i1} X_{i2} - \hat{B}_2 \sum X_{i2}^2 = 0$$

$$\sum X_{i2} y_i = \hat{B}_1 \sum X_{i1} X_{i2} + \hat{B}_2 \sum X_{i2}^2$$

ويمكن صياغة المعادلتين أعلاه على شكل مصفوفة وكآلاتي :

$$\begin{bmatrix} \sum X_{i1} y_i \\ \sum X_{i2} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن إعادة كتابته بالشكل التالي :

$$x'y = (x'x)^{-1} \hat{B}$$

وعليه فان تقدير المعالم باستخدام المصفوفة بأسلوب الانحرافات يأخذ الصيغة التالية :

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

وبعد احتساب المتجه $X'Y$ ومحدد المصفوفة $|X'X|$ الذي ينبغي أن لا يساوي صفرا نوجد مقلوب المصفوفة الذي هو عبارة عن $(X'X)^{-1} = \frac{adj(x'x)}{|x'x|}$ ومن ثم تطبيق القانون أعلاه .

أما $\hat{B}_0$ فيمكن حسابه بموجب القانون آلاتي :

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}_1 - \hat{B}_2 \overline{X}_2$$

وبعد استخدام الحاسوب فقد اصبح من السهل على الباحث الاقتصادي أن يحصل على النتائج من خلال استخدام إحدى البرمجيات الإحصائية مثل: Eviews , SPSS , Excel..إلخ، ولايحتاج إلى استخدام الصيغ أعلاه في الجوانب التطبيقية ولكن تم عرضها هنا لمعرفة كيفية الحصول على معالم نموذج الانحدار الخطي المتعدد باستخدام الطرق الرياضية فقط.

5- دراسة صلاحية النموذج المقدر : في هذه المرحلة وبعد القيام بصياغة النموذج الخطي المتعدد وتقدير معالمه بطريقة المربعات الصغرى العادية، نقوم بدراسة صلاحية هذا النموذج من خلال : [1]

- اختبار معنوية المعالم (t)
- معامل التحديد المضاعف R^2
- اختبار إحصائية F

أولا : اختبار معنوية المعالم باستخدام اختبار ستيودنت(t) : يستخدم اختبار (t) ستيودنت لتقييم معنوية المتغيرات المستقلة $x_1,x_2,\dots x_k$ في نموذج الانحدار المتعدد ويرتكز هذه الإختبار على القيمة المحسوبة والقيمة المجدولة وطريقة استخدامه هي نفس الطريقة التي تطرقنا اليها في النموذج السابق (النموذج الخطي البسيط)، حيث يتم اختبار الفرضية التالية :

- تحديد الفرضيات :

$$\begin{cases} H_0 : \beta j = 0 \\ H_1 : \beta j \neq 0 \end{cases}$$

حيث : $j=0,1,2.....k$

- تحديد قاعدة القرار : في هذه الحالة نرتكز على دالة التوزيع لستيودنت والتي تعتبر دالة متناظرة وبالتالي تحديد منطقة الرفض والقبول يكون من الشكل التالي :

- إذا كانت: $t_{tab} < /t_c/$ ⟵ نرفض H_0 ونقبل H_1
- إذا كانت: $t_{tab} \geq /t_c/$ ⟵ نقبل H_0 ونرفض H_1

- حساب القيمة الإسمية (t_c) : لحساب القيمة الاسمية للمعلمات المقدرة نستخدم العلاقة الحسابية على النحو التالي :

$$t_{c(\beta j)} = \frac{\beta_j}{\delta_{\beta j}}$$

1 - محمد شيخي، مرجع سبق ذكره، ص 37.

– **حساب القيمة الجدولية (t_{tab})** : وهي قيمة يتم استخراجها من الجول الإحصائي الخاص بتوزيع ستيودنت حيث

$$t_{tab} = t_{(\alpha/2\ ;n-k-1)}$$

– **إتخاذ القرار** : وبالارتكاز على قاعدة القرار حيث إذا كانت :

– إذا كانت: $t_{tab} < /t_c/$ ⟵ نرفض H_0 ونقبل H_1 أي نقبل فرضية $H_1 : \beta j \neq 0$ وبالتالي نقول أن المعلمة المقدرة لها معنوية.

– إذا كانت: $t_{tab} \geq /t_c/$ ⟵ نقبل H_0 ونرفض H_1 أي نقبل فرضية $H_0 : \beta j = 0$ وبالتالي نقول أن المعلمة المقدرة ليس لها معنوية .

ثانيا :معامل التحديد المضاعف R^2 : ويعد مؤشر أساس في تقييم مدى العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغيرات المستقلة (X_K)، وبعبارة أخرى هو مقياس يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع، ويمكن اشتقاقه باستخدام المصفوفات بالانحرافات كآلاتي :

$$y = x\hat{B} + e$$
$$e = y - \hat{B}$$
$$e'e = (y - x\hat{B})'(y - x\hat{B})$$
$$e'e = y'y - y'x\hat{B} - x'\hat{B}'y + \hat{B}'x'x\hat{B}$$

وبما أن التحديد الثاني الثالث قيمة واحدة كما وان كلا منها يمثل مبدلا للآخر فان :

$$e'e = y'y - 2\hat{B}x'y + \hat{B}'x'y + \hat{B}'x'x\hat{B}$$
$$\hat{B} = (x'x)^{-1}x'y$$
$$(x'x) = \hat{B} = x'y$$
$$e'e = y'y - 2\hat{B}'x'y + \hat{B}'x'y$$
$$e'e = y'y - \hat{B}'x'y$$

بذلك يمكن كتابة معادلة الانحرافات الكلية كآلاتي :

$$y'y = \hat{B}x'y - e'e$$

إذ أن :

$y'y$: تمثل الانحرافات الكلية .

$\hat{B}'x'y$: تمثل الانحرافات الموضحة من قيل خط الانحدار .

$e'e$: تمثلا الانحرافات غير الموضحة .

وبما أن معامل التحديد R^2 عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قيل خط الانحدار إلى الانحرافات الكلية ، فانه يمثل نسبة مجموع مربعات التغير في المتغيرات المستقلة إلى مجموع المربعات الكلية :

$$R^2 = \frac{\hat{B}x'y}{y'y} = \frac{\hat{B}'x'y}{\sum y^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{e'e}{y'y - n\overline{Y}^2}$$

$$\boxed{R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_1 y + \hat{B}_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}}$$

وإن إضافة متغيرات مستقلة جديدة إلى المعادلة يؤدي إلى رفع قيمة R^2 ، وذلك لثبات قيمة المقام وتغير قيمة البسط بمقدار $(\hat{B}xy)$ غير أن الاستمرار بإضافة المتغيرات المستقلة سيؤدي إلى انخفاض درجات الحرية $(n-k-1)$ ، مما يتطلب استخراج معامل التحديد المعدل أو المصحح $\overline{R}^2$ وعلى النحو الآتي :

$$\boxed{\overline{R}^2 = \left[(1-R^2) \frac{n-1}{n-k-1} \right]}$$

حيث أن هذا المعامل له مجموعة من الخصائص تجعله وسيلة قياس جودة التوفيق أفضل من R^2 فهو على الأقل يأخذ بعين الإعتبار حالة إضافة متغيرات مستقلة جديدة إلى النموذج.

ثالثا: إختبار المعنوية الكلية للنموذج (اختبار إحصائية F) : يهدف هذا الاختبار الى معرفة مدى المعنوية الكلية للنموذج ويعتمد على الفرضية التالية :

$$\begin{cases} H_0 : \hat{B}_0 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = ... = \hat{B}_K = 0 \\ H_1 : \hat{B}_0 \neq \hat{B}_1 \neq \hat{B}_2 \neq ..... \neq \hat{B}_k \neq 0 \end{cases}$$

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي :

$$F_C = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 / k}{\sum e^2{}_i / (n-k-1)}$$

$$F_C = \frac{\sum \hat{y}_i / k}{\sum e^2{}_i / (n-k-1)}$$

$$F_C = \frac{R^2 / k}{(1-R^2)/(n-k-1)}$$

$$F_C \to F_\alpha (k, n-k-1)$$

وبعد احتساب قيمة (F_c) تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية (k) و ($n-k-1$) وبمستوى معنوية معين (α) فإذا كانت القيمة المحسوبة اكبر من القيمة المجدولة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1 أي أن للنموذج معنوية إحصائية، أما إذا كان العكس فنقول عدم وجود معنوية كلية للنموذج.

6- التنبؤ: بعد القيام بالمراحل السابقة الذكر والخاصة بصياغة وبناء نموذج خطي متعدد والقيام بعملية التقدير ودراسة صلاحية النموذج المقدر، تأتي في المرحلة الأخيرة عملية التنبؤ وذلك بايجاد قيم شعاع المتغير التابع Y_t فليكن لدينا النموذج الخطي المتعدد المقدر على الشكل التالي : $\hat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{B}}$

ومقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$

وعليه يكون التنبؤ بالفترة (h) في المستقبل من النحو التالي :

التنبؤ بفترة واحدة في المستقبل :

$$\hat{Y}_t(1) = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1,1} + \hat{B}_2 X_{t+1,2} + \ldots\ldots + \hat{B}_k X_{t+1,k}$$

التنبؤ بفترتين في المستقبل :

$$\hat{Y}_t(2) = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+2,1} + \hat{B}_2 X_{t+2,2} + \ldots\ldots + \hat{B}_k X_{t+2,k}$$

وعليه يكون التنبؤ بالفترة (h) في المستقبل :

$$\hat{Y}_t(h) = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+h,1} + \hat{B}_2 X_{t+h,2} + \ldots\ldots + \hat{B}_k X_{t+h,k}$$

وبالتالي يكون شعاع القيم التقديرية :

$$\hat{Y}_t(h) = \begin{bmatrix} \hat{Y}_t(1) \\ \hat{Y}_t(1) \\ . \\ \hat{Y}_t(1) \end{bmatrix}_{(h\times 1)}$$

أما مصفوفة ملاحظة المتغيرات المستقلة المستقبلية فهي :

$$X_{t+h} = \begin{bmatrix} 1 & X_{t+1,1} & \ldots . X_{t+1,2} \ldots\ldots & X_{t+1,k} \\ 1 & X_{t+2,1} & X_{t+2,2} & X_{t+2,k} \\ . & . & . & . \\ 1 & X_{t+h,1} & X_{t+h,2} & X_{t+h,k} \end{bmatrix}_{(h\times(k+1))}$$

كما يمكن كتابة النموذج المقدر الخطي العام المتنبأ به من الشكل : $\hat{Y}_t(h) = X_{(t+h)}\hat{B}$

7- نماذج انحدار المتغيرات التفسيرية الوصفية : في هذه الحالة سنركز على النماذج الانحدارية التي تحتوي على متغير تابع كمي ومتغيرات مستقلة كمية ووصفية أو نوعية، حيث في تحليل الانحدار نواجه في كثير من الأحيان متغيرات

ذات طبيعة وصفية أونوعية مثل : الجنس، الانتماء،...الخ)، كما نستطيع القول أن المتغيرات الوصفية ليس لها قيمة رقمية معينة ولكن يمكن قياسها عن طريق انشاء متغيرات وهمية ونرمز لها بالرمز (D) اي (Dummy) والتي تأخذ قيمة 0 و 1 (حيث يشير 0 الى عدم وجود الصفة و 1 الى وجود الصفة).

فمثلا يمكن كتابة النموذج الذي يفسر دالة الأجر على النحو التالي :

$$Waegei=B1+B2D2i+ B3D3i+ B4Educi + B5Experi+ Ui \quad .....(1)$$

حيث :

Waege : يمثل الأجر في المؤسسة

D2i: متغير وهمي خاص بالجنس (ياخذ قيمة 1 اذا كانت أنثى و 0 للذكور)

D3i : متغير وهمي خاص بالانتماء النقابي (ياخذ قيمة 1 اذا كانت عضو و 0 غير عضو)

Educi : متغير كمي خاص بالتعليم

Experi : متغير كمي خاص بالخبرة.

وتسمى الفئة التي تأخذ قيمة (0) فئة المرجع او المقارنة المرجعية، ونظرا لان المتغيرات الوهمية تأخذ قيمة (1) و (0) فلا يمكن أخذ اللوغاريتم الخاص بهم، اي لانستطيع ادخال المتغيرات الوهمية في شكل لوغاريتمي,

كما يمكن الاشارة انه اذا كان حجم العينة صغير نسبيا فلا يمكن ادراج الكثير من المتغيرات الوهمية حيث ان كل متغير وهمي سوف يكلف درجة واحدة من الحرية، كما يمكن القول انه اذا كان المتغير الوصفي له (m) من التصنيفات ففي هذه الحالة يمكن تضمين (m) من المتغيرات الوهمية.

7-1-تفسير المتغيرات الوهمية : من خلال النموذج المقدر نفسر معاملات المتغيرات الوهمية، ومن خلال تقدير دالة الانتاج (1) بالمتغيرات الوهمية نتحصل على النموذج الانحداري المقدر على النحو التالي :

$$Waegei=-7,18-3,07D2i+1,56D3i+ 1,37 Educi + 0,16 Experi$$

ومن خلال معاملات المتغيرات الوهمية نجد :

- معامل المتغير D2i اي للاناث (لان الاناث تاخذ قيمة 1) حيث قيمته تساوي (3,07-) اي ان متوسط راتب العاملات في الساعة أقل بحوالي (3,07 قيمة نقدية) مقارنة بمتوسط راتب الذكور وهي الفئة المرجعية هنا وبالطبع الابقاء على جميع المتغيرات الاخرى ثابتة .

- معامل المتغير D3i حيث قيمته تساوي (1,56+) اي ان متوسط الاجر في الساعة للعاملين النقابيين اعلى حوالي 1,56 قيمة نقدية مقارنة بالاجور المتوسطة للعمال غير النقابيين.

- اما بالنسبة للمتغير الكمي الخاص بالتعليم (Educ) حيث نجد ان مقابل كل عام اضافي من التعليم يرتفع متوسط الاجر بالساعة بحوالي 1,37 قيمة نقدية مع بقاء العوامل الاخرى ثابتة، ونفس الشيء بالنسبة للمتغير الكمي الثاني الخاص بالخبرة .

- أما بالنسبة للثابت فهو عبارة عن الاجر في الساعة المتوقع للعاملين الذكور غير النقابيين اي ان قيمة ثابت الانحدار تشير الى جميع تلك الفئات التي تأخذ القيمة المرجعية (0) .

– تشخيص الانحدار:هو عبارة عن كشف المشكلات التي يمكن أن تكون في النماذج الانحدارية، حيث نجد منها: [1]

- الارتباط الخطي المتعدد بين المتغيرات المستقلة (Multicollinearity)
- عدم ثبات التباين (Heteroscedasticity)
- الارتباط الذاتي (Autocorrelation)

1– الارتباط الخطي المتعدد بين المتغيرات المستقلة (Multicollinearity) :

نجد من بين أهم فرضيات النموذج الانحداري الخطي المتعدد هو أنه لا توجد علاقة خطية دقيقة بين المتغيرات المستقلة، فوجود علاقة واحدة او اكثر بين المتغيرات المستقلة تسمى بالارتباط الخطي المتعدد، وعلى هذا الاساس نجد نوعين :

أ– الارتباط المتعدد التام : ليكن لدينا النموذج الانحداري الخطي المتعدد :

$$Y_i=B_1+B_2X_{2i}+\ldots\ldots\ldots+B_kX_{ki}+U_i$$

فاذا كان لدينا :

$X_{2i} + 3X_{3i} = 1$ ففي هذه الحالة نقول وجود حالة ارتباط متعدد تام لان: $X_{2i} = 1 - 3X_{3i}$

وبالتالي اذا قمنا بادراج كل من المتغيرين X_{2i} و X_{3i} في النموذج فسيكون لدينا ارتباط متعدد تام اي وجود علاقة خطية تامة بين المتغيرين، وفي هذه الحالة لا يمكن تقدير معاملات الانحدار ولا يمكن القيام باي نوع من الاستدلال الاحصائي.

ب– الارتباط المتعدد غير التام : اذا كان لدينا :

$X_{2i} + 3X_{3i} + V_i = 1$ حيث V_i هو حد خطأ عشوائي وبالتالي :

$X_{2i} = 1 - 3X_{3i} - V_i$ ففي هذه الحالة نقول وجود حالة ارتباط متعدد غير تام نظرا لوجود حد الخطأ العشوائي.

كما نستطيع القول أن العلاقة الخطية التامة بين المتغيرات المستقلة تكون نادرة تطبيقيا، اي عادة ما يرتكز على الارتباط المتعدد غير التام او ما يسمى بشبه الارتباط.

[1] – Damodar Gujarati، ترجمة مها محمد زكي، الاقتصاد القياسي بالأمثلة، دار حميثرا للنشر، مصر، الطبعة الأولى 2019، ص 131.

2- عدم ثبات التباين (Heteroscedasticity) :

من بين الفرضيات التي يرتكز عليها النموذج الانحداري الخطي أن الخطأ العشوائي (U_i) له تباين ثابت اي تباين متساوي عبر المشاهدات ويرمز له بالرمز (σ^2) ، أما اذا لم يتم استفاء فرضية الثبات او التباين المتساوي فاننا نواجه مشكلة تسمى بعدم ثبات التباين أو التباين غير المتكافىء ويرمز له بالرمز (σ_i^2) فمثلا عند دراسة دالة الانفاق الاستهلاكي، فبالمقارنة بين الاسر ذات الدخل المنخفض والمرتفع، فان هذه الأخيرة ليس لديها فقط مستوى متوسط أعلى من الانفاق الاستهلاكي ولكن ايضا زيادة التقلب في هذ الانفاق، وبالتالي في حالة القيام بانحدار للانفاق الاستهلاكي بالنسبة لدخل الأسرة فمن المرجح ان نواجه عدم ثبات في التباين.

ان وجود مشكل عدم ثبات التباين يخلف مجموعة من النقاط يمكن حصرها في مايلي :

- لا يغير عدم ثبات التباين الخواص غير المتحيزة والاتساق لمقدرات (OLS)

- قد لا تكون اختبارات (t) و (f) التي تستند الى الافتراضات المعيارية موثوق بها، مما يؤدي الى استنتاجات خاطئة بشأن المعنوية الاحصائية لمعاملات الانحدار المقدرة .

- في ظل وجود مشكلة عدم ثبات التباين يتم الارتكاز في عملية التقدير على طريقة المربعات الصغرى المرجحة(WLS) .

2-1- الكشف عن عدم ثبات التباين : من بين أهم الاختبارات المستخدمة في هذا السياق، نجد اختبار Breusch-Pagan واختبار White، وسنركز في عملية الكشف على الاختبار الاول (BP) الاكثر شيوعا واستخداما.

أ- اختبار Breusch-Pagan : في هذا الاختبار نرتكز على الخطوات التالية :

- القيام بعملية الانحدار والتقدير بطريقة (OLS) والحصول على مربعات البواقي (e_i^2)

- نقوم بعملية انحدار مربعات البواقي (e_i^2) على المتغيرات المستقلة والتي عددها (k) والهدف هنا هو معرفة وجود ارتباط بين مربعات البواقي والمتغيرات المستقلة (ارتباط بمتغير أو أكثر).

- القيام باختبار الفرضيات حيث فرضية العدم هي أن تباين الخطأ ثابت، ويمكن استخدام الاحصائية (F) مع درجة حرية (k-1) و (n-k) في البسط والمقام على التوالي، فاذا كانت هاته الاحصائية معنوية نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة والعكس صحيح.

3- الارتباط الذاتي (Autocorrelation) : من بين المشاكل الشائعة في تحليل الانحدار هي مشكل الارتباط الذاتي في حالة استخدام السلاسل الزمنية، حيث من بين فرضيات النموذج الانحداري الخطي هو ان حدود الخطأ (μ_t) غير مرتبطة، اي أن حد الخطأ في الزمن (t) لا يرتبط مع حد الخطأ في الزمن (t-1) او اي حد خطأ آخر في الماضي، واذا كانت هناك علاقة بين حدود الخطأ فينتج عنه المشاكل التالية :

- مقدرات المربعات الصغرى العادية (OLS) غير متحيزة ومتسقة.

- في حالة عدم ثبات التباين فان اجراء اختبارات الفروض يصبح موضع شك، لان الاخطاء المعيارية المقدرة تصبح غير موثوق بها.

3-1- الاختبارات المستخدمة في الكشف عن الارتباط الذاتي للأخطاء : هناك العديد من الاختبارات المستخدمة في هذا المجال وسنركز على أهمها وهو استخدام طريقة الرسم ، اختبار ديربن واتسون "Durrbin-Watson" واختبار " Breusch-Godfrey" .

3-1-1- طريقة الرسم: في هذه الطريقة يتم استنتاج البواقي من خلال معادلة النموذج الانحداري المقترح والقيام برسم منحنى هاته البواقي فاذا كان المنحنى يأخذ نمطا متناوبا فهذا يشير الى ان البواقي مرتبطة، كما يمكن التأكد أكثر من خلال رسم منحنى البواقي في الزمن (t) مقابل البواقي في الزمن (t-1) وملاحظة العلاقة الارتباطية.

3-1-2- اختبار ديربن واتسون "Durbin-Watson": ويعتبر الاختبار الأكثر استخداما وهو اختبار للاحصائيين Durrbin و Watson ويكتب رياضيا كمايلي :

وهي عبارة عن مجموع مربعات الفروق في البواقي المتتالية الى مجموع مربعات البواقي مع العلم أن قيمة d تقع دائما مابين 0 و 4 وذلك من خلال التحليل الرياضي التالي :

$$d= 1-2\ r +1$$

$$d=2-2r$$

$$d=2(1-r)$$

لدينا r هو معامل الارتباط وينتمي للمجال $[-1,1]$ فاذا كان :

- وجود ارتباط تام موجب اي $r=1$ فان $d= 0$

-وجود ارتباط تام سالب اي $r=-1$ فان $d= 4$

وبناءا على حجم العينة وعدد المتغيرات المستقلة يمكن من خلال احصائية Durrbin-Watson انشاء قيمتين حرجتين وهما d_1 و d_2 وتسمى بالحدود الدنيا والحدود العليا ومن خلال تموقع وجود احصائية d بالنسبة للحدود السابقة الذكر نأخذ القرار بشأن وجود او عدم وجود ارتباط ذاتي.

ويمكن الحصول على قيم الحدود الدنيا والعليا (d_1 و d_2) من خلال الجدول الاحصائي لديربن واتسون والذي يرتكز على عدد المتغيرات المستقلة بالاضافة الى حجم العينة.

ومن يمكن أخذ القرارات التالية :

- اذا كان $d_1 > d$ وجود ارتباط ذاتي موجب يكون عادة القيم الخاصة باحصائية d تقترب من 0
- اذا كان $4- d_1 < d$ وجود ارتباط ذاتي سالب يكون عادة القيم الخاصة باحصائية d تقترب من 4
- اذا كان $d_2 < d < 4- d_2$ عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء يكون عادة القيم الخاصة باحصائية d تقترب من 2
- بالاضافة الى وجود مناطق الشك والمشار اليها في المخطط الموالي بالرمز (؟) عندما تكون الاحصائية d موجودة بين الحد الأدنى d_1 والأعلى d_2 او $4-d_1$ و $4-d_2$) من خلال تموقع احصائية d

والمخطط التالي يوضح ذلك :

0	d1	d2	4-d2	4-d1
autocorrélation positive	?	pas d'autocorrélation	?	autocorrélation négative