جمع المصفوفات وطرحها:-

لكي يتم جمع وطرح أي مصفوفتين ، لابد أن تكون المصفوفتان ذات أحجام متساوية حيث تجمع أو تطرح العناصر المتناظرة, أي إن:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & am.n \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad C=A\pm B=\begin{bmatrix} (a_{11}\pm b_{11}) & \cdots & (a_{1n}\pm b_{1n}) \\ (a_{21}\pm b_{21}) & \cdots & (a_{2n}\pm b_{2n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}\pm b_{m1}) & \cdots & (a_{mn}\pm b_{mn}) \end{bmatrix}$$

مثال: اجمع واطرح المصفوفتين A,B التاليتين:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \quad C=A+B=\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 8 & 9 \\ 4 & 15 \end{bmatrix} \quad C=A-B=\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 5 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \quad A.B=\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) & (a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) & (a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}) \\ (a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}) & (a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}) & (a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}) \\ (a_{41}b_{11}+a_{42}b_{21}) & (a_{41}b_{12}+a_{42}b_{22}) & (a_{41}b_{13}+a_{42}b_{23}) \\ (a_{51}b_{11}+a_{52}b_{21}) & (a_{51}b_{12}+a_{52}b_{22}) & (a_{51}b_{13}+a_{52}b_{23}) \end{bmatrix}$$

المحددات

قيمة المحدد:-

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta(A)=(a_{11}.a_{22})-(a_{12}.a_{21})$$

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(A)=\{(a_{11}.a_{22}.a_{33})+(a_{12}.a_{23}.a_{31})+(a_{13}.a_{21}.a_{32})\}$$
$$-\{(a_{12}.a_{21}.a_{33})+(a_{11}.a_{23}.a_{32})+(a_{13}.a_{22}.a_{31})\}$$

تمثيل المعادلات الخطية بنظام المصفوفات:- إذا كانت لدينا المعادلات الخطية التالية بالامكان تحويلها إلى نظام المصفوفات كالأتي:

$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3=b_1$$
$$a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3=b_2$$
$$a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3=b_3$$

حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{3`} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore Ax = b$$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta(A)}, x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta(A)}, x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta(A)}$$

المحيددات والمرافقات ومعكوس المصفوفات

المحيددات:

إذا كانت A مصفوفة مربعة , فان محيدد العنصر a_{ij} يشار إليه بالرمز M_{ij} ويمكن إيجاده عن طريق استبعاد الصف I والعمود j من المصفوفة الأصلية

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}1 & 7\\ 6 & 0\end{vmatrix}, M_{12}=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 2 & 0\end{vmatrix}, M_{13}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 6\end{vmatrix}$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 6 & 0\end{vmatrix}, M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 2 & 0\end{vmatrix}, M_{23}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 6\end{vmatrix}$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 1 & 7\end{vmatrix}, M_{32}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{vmatrix}, M_{33}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}$$

المرافقات:

يطلق اسم المرافقات C_{ij} على المحيدد M_{ij} بعد إعطائها الإشارة الجبرية الملائمة حسب موقع المحيدد وذلك كالأتي:

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 7\\ 6 & 0\end{vmatrix}, C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 7\\ 2 & 0\end{vmatrix}, C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 6\end{vmatrix}$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 5\\ 6 & 0\end{vmatrix}, C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 2 & 0\end{vmatrix}, C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 6\end{vmatrix}$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 5\\ 1 & 7\end{vmatrix}, C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{vmatrix}, C_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}$$

المصفوفة المرافقة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الحجم m فان المصفوفة المرافقة لها يمكن إيجادها كالأتي:

1- يتم إيجاد محورة المصفوفة A أي A'

2- يتم إيجاد المرافق لكل عناصر مبدل (محورة) المصفوفة A

3- يتم إيجاد قيمة كل مرافق عناصر مبدل المصفوفة A

بافتراض إن A^* يعبر عن المصفوفة المرافقة للمصفوفة A يكون شكل المصفوفة المرافقة كالأتي :

$$A^*=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1m}\\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mm}\end{bmatrix}$$

مثال $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 0\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$ أولا: نوجد محور المصفوفة $A'=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$$C_{11}=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}, C_{12}=-1\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}, C_{13}=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 0\end{vmatrix}$$

ثانيا: نوجد مرافق كل عناصر المصفوفة الممحورة A'.

$$C_{21}=-1\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}, C_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}, C_{23}=-1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}, C_{32}=-1\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}, C_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}$$

ثالثا: نوجد قيمة كل مرافق العناصر السابقة:

$C_{11}=10$ $C_{12}=-2$ $C_{13}=-20$
$C_{21}=-4$ $C_{22}=-14$ $C_{23}=8$
$C_{31}=-18$ $C_{32}=11$ $C_{33}=-1$

رابعا : تكون المصفوفة المرافقة كالأتي:

$$A^*=\begin{bmatrix}10 & -2 & -20\\ -4 & -14 & 8\\ -18 & 11 & -1\end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة وقيمة محددها لا يساوي صفر، فانه يمكن إيجاد معكوس المصفوفة A الذي يشار إليه بالرمز A^{-1} عن طريق قسمة جميع عناصر المصفوفة المرافقة A^* على محدد المصفوفة A.

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta(A)}$$

مثال: أوجد معكوس المصفوفة A التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل: أولا: نوجد قيمة محدد المصفوفة A. $\Delta(A) = -74$

ثانيا: نوجد محور المصفوفة. $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ثالثا: نوجد المصفوفة المرافقة. $A^* = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -20 \\ -4 & -14 & 8 \\ -18 & 11 & -1 \end{bmatrix}$

رابعا:قسمة عناصر المصفوفة المرافقة على محدد المصفوفة A ، فيكون معكوس المصفوفة A كالأتي:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{-74} & \frac{-2}{-74} & \frac{-20}{-74} \\ \frac{-4}{-74} & \frac{-14}{-74} & \frac{8}{-74} \\ \frac{-18}{-74} & \frac{11}{-74} & \frac{-1}{-74} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{74} & \frac{2}{74} & \frac{20}{74} \\ \frac{4}{74} & \frac{14}{74} & -\frac{8}{74} \\ \frac{18}{74} & -\frac{11}{74} & \frac{1}{74} \end{bmatrix}$$

حل المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة:

يمكن حل المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة بإتباع الخطوات التالية:

1- يتم تمثيل المعادلات الخطية بنظام المصفوفات وذلك كما يلي:

A. x=b

2- يضرب طرفي المعادلة في معكوس المصفوفة A نحصل على الأتي:

$A^{-1}Ax=A^{-1}b$

$Ix=A^{-1}b$

$X=A^{-1}b$

ملاحظة: إن حاصل ضرب مصفوفة في معكوسها نحصل على مصفوفة الوحدة

مثال: أوجد قيمة المتغيرين x2,x1 التي تحقق صحة المعادلة بطريقة استخدام معكوس المصفوفة.

$3x_1-4x_2=-5$

$2x_1+x_2=4$

1- يتم تمثيل المعادلات الخطية بنظام المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2- نوجد معكوس المصفوفة بإتباع الخطوات الخاصة بإيجاد معكوس المصفوفة فتكون كلاني:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{4}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$X_1=1$ $X_2=2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$